

الدرس 3

الإشتقاقية ودراسة الدوال

1 - تعاريف (تذكير)

D_f مجموعة تعريف الدالة f و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

1 - 1 العدد المشتق و الدالة المشتقة

تعريف 1

f دالة معرفة على مجال I و a عند منه

عندما نقول أن ℓ هو العدد المشتق للدالة f عند a نغني أن أحد الشرطين التاليين محقق.

الشرط الأول،

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell$$

الشرط الثاني،

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$$

و نرمز إلى العدد المشتق f عند a بـ $f'(a)$

إذا قبلت الدالة f عددا مشتقا عند a نقول أن f قابلة للاشتقاق عند a .

و إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند كل عدد من مجال I محتوي في D_f

نقول أن f قابلة للاشتقاق على I .

24 -

لتكن f دالة معرفة بـ $f(x) = 2\sin x - x$

إذا علمت أنها متزايدة تماما على المجال $[0, \frac{\pi}{3}]$ ومتناقصة تماما على المجال $[\frac{\pi}{3}, \pi]$

استنتج عند حلول المعادلة $\sin x = \frac{x}{2}$ على المجال $[0, \pi]$ ثم على المجال $[-\pi, 0]$

ثم بين أن هذه الحلول وحيدة في \mathbb{R}

25 -

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{x^2 + 1}}{x}, x \neq 0$$

$$f(0) = a$$

(1) ما هي القيم التي يأخذها a حتى تكون الدالة f مستمرة على \mathbb{R} ؟

26 -

f دالة مستمرة على المجال $[0, 1]$ بحيث من أجل كل عدد حقيقي x من

$$f(x) \in I$$

g الدالة المعرفة على I بـ $g(x) = f(x) - x$

بتطبيق نظرية القيم المتوسطة على الدالة g بين أنه يوجد عدد حقيقي a من I

$$f(a) = a$$

تعريف 2

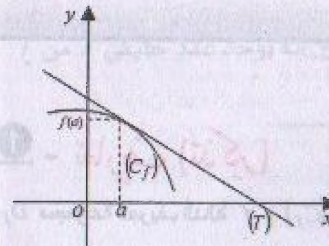
f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I . الدالة المشتقة للدالة f على المجال I هي الدالة التي نرمز لها بـ f' والتي تفرق بكل x من I العدد $f'(x)$.

ملاحظة

- (1) يمكن كتابته $f'(x) = \frac{d.f}{dx}$ وتسمى الكتابة التفاضلية لـ f' .
- (2) تعريف f' ليس مقتصرًا على مجال واحد بل يمكن تعريفها على اتحاد مجالات.

مثال -

الدالة المشتقة للدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ المعرفة على $D_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ هي الدالة $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ حيث $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.



2-1 المماس لمنحني عند نقطة

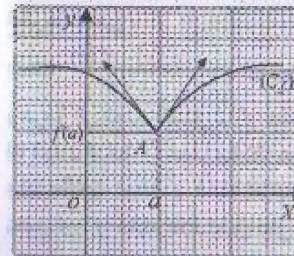
f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I يشمل a . المماس للمنحني (C_f) عند النقطة $A(a, f(a))$ هو المستقيم (T) الذي يمر بـ A ومعامل توجيهه $f'(a)$ و معادلته هي: $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

3-1 المشتق من اليمين ومن اليسار عند عدد معين

f دالة مستمرة على مجال I يشمل a .

إذا كانت الدالة $f(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ تقبل النهاية ℓ_1 من اليمين عند a نقول أن f قابلة للاشتقاق من اليمين عند a .

إذا كانت الدالة $f(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ تقبل النهاية ℓ_2 من اليسار عند a نقول أن الدالة f قابلة للاشتقاق من اليسار عند a .



التفسير الهندسي

التمثيل البياني للدالة f يقبل نصف مماس من اليمين عند النقطة $A(a, f(a))$ معامل توجيهه ℓ_1 و يقبل أيضا نصف مماس من اليسار عند A معامل توجيهه ℓ_2 .

إذا كان $\ell_1 \neq \ell_2$ فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند a والنقطة A تسمى نقطة زاوية.

مثال -

f دالة معرفة على \mathbb{R} بالعلاقة $f(x) = \frac{3x+2}{|x-1|+3}$

- (1) ادرس قابلية اشتقاق f على يمين 1، ثم اكتب معادلة نصف المماس (T_1) .
- (2) ادرس قابلية اشتقاق f على يسار 1، ثم اكتب معادلة نصف المماس (T_2) .

الحل

(1) لمعرفة إن كانت f قابلة للاشتقاق على يمين 1 نبحث إن كانت النسبة $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ تقبل نهاية حقيقية لـ x يؤول إلى 1 بقيم أكبر.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{3x+2}{|x-1|+3} - \frac{5}{3}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x+2 - 5|x-1| - 5}{3(x-1)(|x-1|+3)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4(x-1)}{3(x+2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4}{3(x+2)} = \frac{4}{9}$$

النسبة $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ لها نهاية حقيقية على يمين الواحد وبالتالي f قابلة للاشتقاق من اليمين عند 1 والعديد المشتق من اليمين هو $\ell_1 = \frac{4}{9}$.

و معادلة نصف المماس لـ (C_f) على يمين A هي: $(T_1): y = \frac{4}{9}(x-1) + \frac{5}{3}, x \geq 1$

(2) لمعرفة إن كانت f قابلة للاشتقاق على يسار 1 نبحث إن كانت النسبة $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ لها نهاية حقيقية لـ x يؤول إلى 1 من اليسار.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{3x+2}{|x-1|+3} - \frac{5}{3}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x+2 - 5|x-1| - 5}{3(-x+4)(|x-1|+3)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{14}{3(-x+4)} = \frac{14}{9} = \ell_2$$

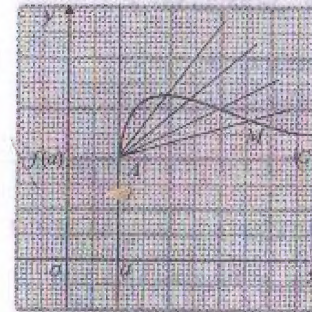
النسبة $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ لها نهاية حقيقية على يسار 1 بالتالي f قابلة للاشتقاق من اليسار عند 1 والعديد المشتق من اليسار هو $\ell_2 = \frac{14}{9}$.

و معادلة نصف المماس لـ (C_f) على يسار A هي: $(T_2): y = \frac{14}{9}(x-1) + \frac{5}{3}, x \leq 1$

بما أن $\ell_1 \neq \ell_2$ فإن f غير قابلة للاشتقاق عند 1 والنقطة $A(1, \frac{5}{3})$ هي نقطة زاوية.

1-4 المماس العمودي لمنحن

إذا كانت f مستمرة عند a و $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \infty$ فإن المنحنى (C_f) يقبل مماس عمودي عند النقطة $A(a, f(a))$.



التفسير الهندسي

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \infty$ حيث f مستمرة عند a

تعني أن معاملات توجيه المستقيمات المارة من A والقاطعة لـ (C_f) تؤول إلى $(+\infty)$.

إن هذه المستقيمات تؤول إلى المستقيم ذي المعادلة $x = a$.

مثال -

f دالة معرفة على المجال $[-1, +\infty[$ بالعلاقة $f(x) = \sqrt{x+1}$ و (C_f) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس. ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند -1 ، ثم فسر النتيجة الحاصل عليها هندسيا.

✓ الحل

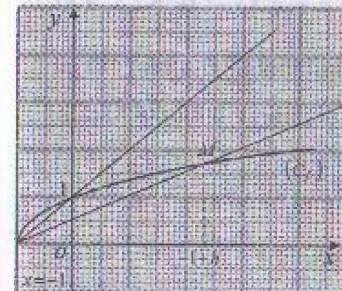
من أجل $h > 0$ لدينا $\frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$

و $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$

إذن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند -1 .

وبما أن النسبة تؤول إلى $(+\infty)$ لـ h يؤول إلى الصفر فإن معامل توجيه المستقيم (AM) يصبح كبيرا جدا.

إذن المماس لـ (C_f) عند $A(-1, 0)$ عمودي ومعادلته هي $x = -1$.



1-5 التقريب التآلفي وطريقة أولر

خاصية

إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند x من I فإنه توجد دالة ε بحيث من أجل كل عدد حقيقي h مع $x+h \in I$.

لدينا $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ مع $f(x+h) = f(x) + h \times f'(x) + h \varepsilon(h)$ نتحصل هكذا على التقريب $f(x+h) \approx f(x) + h f'(x)$ لـ h يقرب من الصفر. نسمي $f(x) + h f'(x)$ التقريب التآلفي لـ $f(x+h)$ من أجل h صغير جدا.

الإثبات

لنكن x عددا حقيقيا من I ، بما أن f قابلة للاشتقاق عند x فإن

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

بوضع $\varepsilon(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x)$ يكون:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = f'(x) - f'(x) = 0$$

$$(1) \dots \dots f(x+h) - f(x) = h \times f'(x) + h \varepsilon(h)$$

بوضع $\Delta x = x + h - x = h$

$$\Delta y = f(x+h) - f(x)$$

العلاقة (1) تكتب:

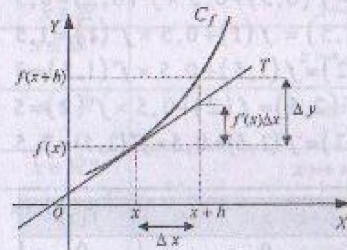
$$\Delta y = (\Delta x) f'(x) + (\Delta x) \varepsilon(\Delta x)$$

ومنه التقريب $\Delta y \approx (\Delta x) f'(x)$

هذا التقريب يقودنا إلى الكتابة الرمزية

$$dy = f'(x) dx$$

و تسمى هذه الأخيرة بالكتابة التفاضلية.



طريقة أولر

في كثير من المسائل يحدث وأن نعرف الدالة المشتقة f' للدالة f و قيمة لـ f عند عدد

(شرط أولي $y_0 = f(x_0)$) بدون معرفة العبارة الصريحة لـ f .

تسمح لنا طريقة أولر بإنشاء منحني تقريبي للدالة f .

لذلك نعلم على فكرة أنه من أجل h قريب

من الصفر يكون $f(x+h)$ قريب من

$$f(x) + h \times f'(x)$$

بما أن لدينا $f'(x_0) = y_0$ نستطيع أن نعلم

نقطة من المنحنى البياني لـ f وهي $A_0(x_0, y_0)$.

نختار عددا حقيقيا h غير معدوم و قريب من الصفر

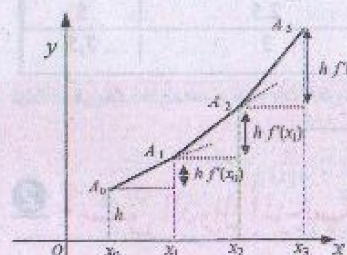
و بما أننا نعرف $f'(x_0)$ ننشئ النقطة A_1

ذات الفاصلة $x_1 = x_0 + h$ التي تنتمي إلى المستقيم المار من A_0

و معامل توجيهه $f'(x_0)$ يكون ترتيبها $y_1 = f(x_0) + h \times f'(x_0)$

بما أن $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + h f'(x_0)$ لـ h يقرب من الصفر

فإن A_1 قريبة من (C_f) .



بنفس الطريقة و ابتداء من A_1 نستطيع إنشاء النقطة $A_2(x_1+h, f(x_1)+h f'(x_1))$ وهكذا نعلم النقاط A_n التي إحداثياتها $x_n = x_{n-1} + h$ و $y_n = f(x_{n-1}) + h f'(x_{n-1})$ مع $n \geq 1$. وتسلسل القطع $[A_0 A_1], [A_1 A_2], \dots$ يعطينا تمثيلا بيانيا مقربا لـ (C_f) و هذا التمثيل متعلق بالخطوة h و كلما كانت h صغيرة جدا كلما كان النحنى دقيقا بالقدر الكافي.

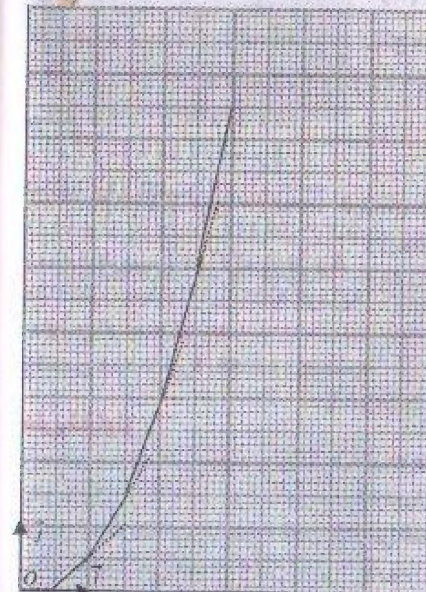
مثال -

لتكن f دالة معرفة بـ $f(0)=0$ و $f'(x)=2x$ ، باستعمال طريقة أولر و يأخذ خطوة $p=0,5$ انشئ جدول القيم المقربة لـ $f(x)$ من أجل كل x من $[0, 3]$ ثم انشئ منحنى تقريبي لـ f على هذا المجال.

الحل

$$\begin{aligned} f(0,5) &= f(0) + 0,5 \times f'(0) = 0 \\ f(1) &= f(0,5) + 0,5 \times f'(0,5) = 0,5 \\ f(1,5) &= f(1) + 0,5 \times f'(1) = 1,5 \\ f(2) &= f(1,5) + 0,5 \times f'(1,5) = 3 \\ f(2,5) &= f(2) + 0,5 \times f'(2) = 5 \\ f(3) &= f(2,5) + 0,5 \times f'(2,5) = 7,5 \end{aligned}$$

| x | $f(x)$ |
|-----|--------|
| 0 | 0 |
| 0,5 | 0 |
| 1 | 0,5 |
| 1,5 | 1,5 |
| 2 | 3 |
| 2,5 | 5 |
| 3 | 7,5 |



2 - مشتق الدوال المرجعية

1 - 2 عمليات على الاشتقاق

مبرهنة

U و V دالتان قابلتان للاشتقاق على D (D مجال أو اتحاد مجالات) و k عدد حقيقي إذن الدوال kU ، $U+V$ و $U \times V$ قابلة للاشتقاق على D و لدينا:

$$(U \times V)' = U'V + U \times V' \quad \text{و} \quad (U+V)' = U' + V' \quad , \quad (kU)' = kU'$$

و إذا كانت V غير معدومة على D فإن $\frac{U}{V}$ و $\frac{1}{V}$ قابلتان للاشتقاق على D و لدينا :

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - V'U}{V^2} \quad \text{و} \quad \left(\frac{1}{V}\right)' = -\frac{V'}{V^2}$$

ملاحظة

الدوال كثيرات الحدود قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} و الدالة الناطقة قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها.

جدول مشتقات الدوال الشهيرة.

| الدالة | الدالة المشتقة | تعاليق |
|---|---|----------------------|
| $x \mapsto k$ (ثابت) | $x \mapsto 0$ | $x \in \mathbb{R}$ |
| $x \mapsto x$ | $x \mapsto 1$ | $x \in \mathbb{R}$ |
| $x \mapsto \frac{1}{x}$ | $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ | $x \in \mathbb{R}^*$ |
| $x \mapsto x^n$ مع $n \in \mathbb{N}^*$ | $x \mapsto n x^{n-1}$ | $x \in \mathbb{R}$ |
| $x \mapsto x^n$ مع $n \in \mathbb{Z}^*$ | $x \mapsto n x^{n-1}$ | $x \in \mathbb{R}^*$ |
| $x \mapsto \sqrt{x}$ | $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $x \in]0, +\infty[$ |
| $x \mapsto \sin x$ | $x \mapsto \cos x$ | $x \in \mathbb{R}$ |
| $x \mapsto \cos x$ | $x \mapsto -\sin x$ | $x \in \mathbb{R}$ |
| $x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x + a_1$ | $x \mapsto n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_2$ | $x \in \mathbb{R}$ |

تمارين تدريبية

من أجل كل دالة من الدوال التالية عين مجموعة تعريفها و مجموعة تعريف دالتها المشتقة ثم عين دالتها المشتقة :

$$g(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{x^2 + 3x} \quad (2) \quad , \quad f(x) = 2x^3 + 5x - 1 \quad (1)$$

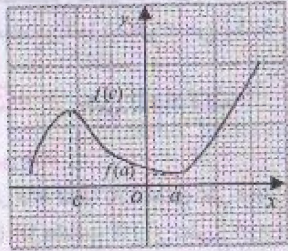
$$k(x) = x^2 \sin x \quad (4) \quad , \quad h(x) = \frac{1}{x^2 - x + 3} \quad (3)$$

الحل

(1) الدالة f هي دالة كثيرة حدود معرفة و قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} و لدينا $f'(x) = 6x^2 + 5$

(2) الدالة g معرفة إذا و فقط إذا كان $x^2 + 3x \neq 0$

القول أن $f(c)$ قيمة حدية عظمى (صغرى) يعني أنه نستطيع إيجاد مجال مفتوح I محتوي I ويشمل c بحيث من أجل كل x من I لدينا $f(x) \leq f(c)$ (أو $f(x) \geq f(c)$)



مبرهنة
 f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I يشمل c .
 إذا انعدمت $f'(x)$ عند c مغيرة إشارتها في جوار c
 فإن $f(c)$ هي قيمة حدية و المماس للمنحني (C_f)
 عند النقطة $A(c, f(c))$ يكون أفقياً.

تمرين تدريبي 1

ادرس تغيرات الدالة f المعرفة على $[-2, 3]$ بالشكل $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$
 واستنتج القيم الحدية لـ f على هذا المجال ثم اعط حصرًا لـ $f(x)$ على المجال السابق.

✓ الحل

الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} لأنها دالة كثيرة الحدود و بالتالي فهي قابلة للاشتقاق على المجال $[-2, 3]$ و من أجل كل x من $[-2, 3]$ لدينا $f'(x) = 3x^2 - 6x$
 $f'(x) = 0$ يكافئ $(x=0)$ أو $(x=2)$
 إشارة $f'(x)$ مدونة في الجدول المجاور
 إذا كان $x \in]0, 2[$ فإن $f'(x) < 0$
 و منه الدالة f متناقصة تمامًا على $[0, 2]$
 إذا كان $x \in]2, 3[$ أو $x \in]-2, 0[$ فإن $f'(x) > 0$
 و منه الدالة f متزايدة تمامًا على كل من المجالين $[-2, 0]$ و $[2, 3]$
 و إليك جدول تغيرات الدالة f .

| x | -2 | 0 | 2 | 3 |
|-------------------|---------|--------|--------|--------|
| إشارة $f'(x)$ | + | 0 | - | + |
| تغيرات الدالة f | $f(-2)$ | $f(0)$ | $f(2)$ | $f(3)$ |

$$f(-2) = 18, f(-2) = 2, f(0) = 2, f(2) = -2, f(3) = 2$$

$f(0) = 2$ هي قيمة حدية عظمى للدالة f على المجال $[-2, 2]$

$f(3) = 2$ هي قيمة حدية عظمى للدالة f على المجال $[0, 3]$

$f(-2) = -18$ هي قيمة حدية صغرى للدالة f على المجال $[-2, 2]$

$f(2) = -2$ هي قيمة حدية صغرى للدالة f على المجال $[0, 3]$

$x^2 + 3x \neq 0$ يكافئ $(x \neq 0)$ و $(x \neq -3)$ و منه $D_f = \mathbb{R} - \{0, -3\}$
 و بما أن g دالة ناطقة فهي قابلة للاشتقاق على D_g و من أجل كل x من D_g لدينا:

$$g'(x) = \frac{(4x-1)(x^2+3x) - (2x+3)(2x^2-x+1)}{(x^2+3x)^2} = \frac{7x^2-2x-3}{(x^2+3x)^2}$$

(3) من أجل كل x من \mathbb{R} يكون $x^2 - x + 3 > 0$ و منه مجموعة تعريف الدالة h هي \mathbb{R}

و بما أن الدالة h ناطقة فإنها قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} و لدينا $h'(x) = \frac{-(2x-1)}{(x^2-x+3)^2}$

(4) الدالتان $x \mapsto \sin x$ و $x \mapsto x^2$ معرفتان وقابلتان للاشتقاق على \mathbb{R}

و بالتالي الدالة $K = U \times V$ قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}

و من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا $K'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x$

3 - تطبيقات الاشتقاق

3-1 اتجاه التغير

مبرهنة

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I محتوي في D_f .

إذا كان من أجل كل x من I لدينا $f'(x) > 0$ فإن الدالة f متزايدة تمامًا على I .

إذا كان من أجل كل x من I لدينا $f'(x) < 0$ فإن الدالة f متناقصة تمامًا على I .

إذا كان من أجل كل x من I لدينا $f'(x) = 0$ فإن الدالة f ثابتة على I .

ملاحظة

إذا انعدمت f' عند بعض القيم من المجال I ولا تغير إشارتها على I فإن الدالة f تحافظ على تغيراتها.

مثال -

f دالة معرفة على \mathbb{R} بالعبارة $f(x) = x^3$

من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا $f'(x) = 3x^2$

من أجل كل x من \mathbb{R}^* لدينا $f'(x) > 0$ و $f'(0) = 0$

إذن الدالة f موجبة على \mathbb{R} و تنعدم عند 0 و بالتالي f متزايدة تمامًا على \mathbb{R} .

3-2 القيم الحدية للدالة

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I يشمل c .

والبك جدول تغيرات الدالة f :

| x | $-\infty$ | -1 | 1 | $+\infty$ |
|---------------|-----------|------|------|-----------|
| $f'(x)$ إشارة | + | 0 | - | + |
| تغيرات f | | ↗ +3 | ↘ -1 | ↗ +∞ |

بما أن f متزايدة تماما على $]-\infty, -1[$ و صورة هذا المجال هي $]-\infty, 3[$ والصفر ينتمي إلى $]-\infty, 3[$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α .

وكون $f(-2) = -1$ يكون $\alpha \in]-2, -1[$.

لتعيين حصر α بتقريب 10^{-3} نتبع طريقة ديكتومي.

$m = \frac{a+b}{2} = -1,5$ و $f(m) = 0,125$ إذن $\alpha \in]-2, -1,5[$

$m' = \frac{-2-1,5}{2} = -1,75$ و $f(m') = 0,89$ إذن $\alpha \in]-2, -1,75[$

$m'' = -1,875$ و $f(m'') = 0,033$ إذن $\alpha \in]-2, -1,875[$

$m''' = -1,9375$ و $f(m''') = -0,46$ إذن $\alpha \in]-1,9375, -1,875[$

بما أن f متناقصة تماما على $]1, +\infty[$ و صورة هذا المجال هي $]-1, 3[$ والصفر ينتمي إلى $]-1, 3[$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β .

بنفس الطريقة نبين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]1, +\infty[$

إذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل ثلاثة حلول.

4 - 3 استعمال العدد المشتق في حساب بعض النهايات

لستطيع استعمال العدد المشتق لتعيين بعض النهايات.

إذا كانت لدينا عبارة من الشكل $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ مع f دالة قابلة للاشتقاق عند a

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) \quad \text{فإن}$$

مثال -

$$(1) \quad g(x) = \frac{\cos x - 1}{x} \quad \text{نريد حساب} \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$$

بوضع $f(x) = \cos x$ نجد $f(0) = 1$ بالتالي $g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

لكن f قابلة للاشتقاق عند الصفر إذن $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا $f'(x) = -\sin x$

ومنه نجد $f'(0) = 0$ إذن $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = f'(0) = 0$

$-18 = f(-2)$ هي قيمة حدية صغيرة للدالة f على المجال $[-2, 3]$

العدد 2 هو قيمة حدية عظمى للدالة f على مجال $[-2, 3]$

و نحصل عليها من أجل $x=0$ و $x=3$

ومنه من أجل كل x من $[-2, 3]$ يكون $-18 \leq f(x) \leq 2$.

3 - 3 حل المعادلات

مبرهنة

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال $I = [a, b]$

(1) إذا كانت $f'(x) > 0$ على $[a, b]$ فإن من أجل كل k من $[f(a), f(b)]$

المعادلة $f(x) = k$ لها حل وحيد في المجال I .

(2) إذا كانت $f'(x) < 0$ على $[a, b]$ فإن من أجل كل k من $[f(b), f(a)]$

المعادلة $f(x) = k$ لها حل وحيد في المجال I .

ملاحظة

نتائج المبرهنة تبقى صحيحة حتى ولو انعدمت f' عند بعض القيم من I .

تمرين تدريبي 1

f دالة معرفة على \mathbb{R} بالعبارة $f(x) = x^3 - 3x + 1$

(1) عين نهايات الدالة f عند $+\infty$ و عند $-\infty$

(2) ادرس تغيرات الدالة f .

(3) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل ثلاثة حلول ثم اعط حصرًا بتقريب 10^{-3} للحل الذي ينتمي إلى $]-2, -1[$

الحل

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

(2) الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}

و من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا $f'(x) = 3x^2 - 3$

$f'(x) = 0$ يكافئ $(x=1)$ أو $(x=-1)$.

إذا كان $x \in]-1, 1[$ فإن $f'(x) < 0$

ومنه f متناقصة تماما على $]-1, 1[$.

إذا كان $x \in]1, +\infty[$ أو $x \in]-\infty, -1[$ فإن $f'(x) > 0$

ومنه f متزايدة تماما على كل من المجالين $]1, +\infty[$ و $]-\infty, -1[$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \frac{\sin x}{x} \quad (2) \quad \text{نريد حساب}$$

بوضع $f(x) = \sin x$ نجد $f(0) = 0$ بالتالي $h(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ نكتب
من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $f'(x) = \cos x$ إذن $f'(0) = 1$ ومنه نجد $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = f'(0) = 1$

4 - مشتق دالة مركبة

1-4 نظرية أساسية

مبرهنة

إذا كانت g دالة قابلة للاشتقاق على مجال J وكانت U دالة قابلة للاشتقاق على I ومن أجل كل x من I لدينا $U(x) \in J$.
فإن الدالة للعرفة $f(x) = g(U(x))$ قابلة للاشتقاق على I ومن أجل كل x من I لدينا $f'(x) = U'(x)g'(U(x))$

الإثبات

لكي نبرهن على أن f قابلة للاشتقاق على I يجب أن نبرهن أن الدالة h للعرفة $h(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

لها نهاية عند a هي $U'(a)g'(U(a))$ حيث a كفي من I

نفرض أنه من أجل كل x بجوار a ويختلف عنه $U(x) \neq U(a)$ وعليه من أجل كل x من هذا الجوار يمكن كتابة

$$h(x) = \frac{g(U(x)) - g(U(a))}{U(x) - U(a)} \times \frac{U(x) - U(a)}{x - a}$$

لكن U قابلة للاشتقاق عند a إذن $\lim_{x \rightarrow a} \frac{U(x) - U(a)}{x - a} = U'(a)$

بوضع $t(x) = \frac{g(X) - g(U(a))}{X - U(a)}$ و $U(x) = X$ يكون $t(x) = \frac{g(U(x)) - g(U(a))}{U(x) - U(a)}$

لكن U قابلة للاشتقاق عند a إذن $\lim_{x \rightarrow a} t(x) = 0$ مع $X = U(x) = U(a) + (x - a)U'(a) + (x - a)\varepsilon(x)$

إذن $\lim_{x \rightarrow a} X = U(a)$ و $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(X) - g(U(a))}{X - U(a)} = g'(U(a))$

لأن g قابلة للاشتقاق عند $U(a)$ ومنه $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = g'(U(a)) \times U'(a)$

ملاحظة

(1) البرهنة السابقة تبقى صحيحة إذا كان I و J عبارة عن اتحاد مجالات

$$(2) \text{ نستطيع كتابة } (g(U(x)))' = \frac{d(g \circ U)}{dx} = \frac{d g}{d U} \times \frac{d U}{d x}$$

تمرين تدريبي 1

عين الدالة المشتقة لكل دالة من الدوال التالية :

$$f_3(x) = \cos \frac{1}{x}, \quad f_2(x) = \sqrt{x^2 + 1}, \quad f_1(x) = (x^2 + 1)^3$$

الحل

f_1, f_2, f_3 هي دوال مركبة من الشكل $g \circ u$ وفي كل حالة لابد من معرفة g و u

نضع $f_1 = g_1 \circ u_1$ حيث $g_1(x) = x^3$ و $u_1(x) = x^2 + 1$

الدالتان u_1 و g_1 قابلتان للاشتقاق على \mathbb{R}

إذن حسب البرهنة السابقة الدالة f_1 قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ($I = J = \mathbb{R}$)

من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا $u_1'(x) = 2x$ و $g_1'(x) = 3x^2$

$$\text{إذن } f_1'(x) = 2x(3)(x^2 + 1)^2 = 6x(x^2 + 1)^2$$

نضع $f_2 = g_2 \circ u_2$ حيث $g_2(x) = \sqrt{x}$ و $u_2(x) = x^2 + 1$

الدالة u_2 قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} والدالة g_2 قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ ومن أجل كل x من I فإن $U(x) \in J$

من أجل كل x من J لدينا $g_2'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

ومن أجل كل x من I لدينا $u_2'(x) = 2x$

$$\text{إذن } f_2'(x) = 2x \times \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

نضع $f_3 = g_3 \circ u_3$ حيث $g_3(x) = \cos x$ و $u_3(x) = \frac{1}{x}$

ومن أجل كل x من \mathbb{R}^* و $J = \mathbb{R}^*$ و $I = \mathbb{R}^*$

الدالة u_3 قابلة للاشتقاق على I ولدينا $u_3'(x) = -\frac{1}{x^2}$

الدالة g_3 قابلة للاشتقاق على J ولدينا $g_3'(x) = -\sin x$

$$\text{إذن } f_3'(x) = u_3'(x)g_3'(u_3(x)) = -\frac{1}{x^2} \times \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

2-4 مشتق الدالة العكسية

مبرهنة

إذا كانت f دالة مستمرة ورتيبة تماما و قابلة للاشتقاق على I وكانت $f'(x)$ لا تتعدم على I فإن الدالة العكسية g للدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $J=f(I)$ ولدينا $y=f(x)$ مع $g'(y)=\frac{1}{f'(x)}$.

الإثبات

من أجل كل x من I لدينا $(g \circ f)(x) = x$ ولدينا $(g \circ f)'(x) = 1$ يكون I من x من أجل كل x من I ولتكون $g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$ ينتج $(g \circ f)'(x) = f'(x)g'(f(x))$ بمان $y = f(x)$ فإن $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ من أجل كل y من J .
نرمز إلى الدالة العكسية للدالة f بالرمز f^{-1} .

تمرين تدريبي 1

- $f(x) = 3x^2 + 6x$ دالة معرفة بالعبارة
(1) أثبت أن f تقابل من المجال $]-\infty, -1[$ في المجال $]-3, +\infty[$
(2) احسب بطريقتين مختلفتين $(f^{-1})'(0)$

الحل

- (1) الدالة f مستمرة على مجال $]-\infty, -1[$ لأنها دالة كثيرة حدود.
الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} لأنها دالة كثيرة حدود ولدينا $f'(x) = 6x + 6$ من أجل كل x من $]-\infty, -1[$ لدينا $f'(x) < 0$ ولدينا $]-\infty, -1[$ و منه f متناقصة تماما على $]-\infty, -1[$ بمان أن f مستمرة ومتناقصة تماما على $]-\infty, -1[$ فهي تقابل من $]-\infty, -1[$ في $]-3, +\infty[$ و بالتالي تقبل دالة عكسية f^{-1}
(2) حساب $(f^{-1})'(0)$ باستعمال التعريف
من أجل كل y من $]-3, +\infty[$ لدينا $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ حيث $y = f(x)$
 $3x^2 + 6x = 0$ و منه نجد $x = 0$ أو $x = -2$
 $x = 0$ مرفوض لأن $0 \notin]-1, +\infty[$ و بالتالي قيمة x المقبولة هي -2

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(-2)} = -\frac{1}{6}$$

- حساب $(f^{-1})'(0)$ بتعيين عبارة f^{-1}
من أجل كل x من I و من أجل كل y من $J=f(I)$:
 $y = f(x)$ يكافئ $3x^2 + 6x - y = 0$ (1)
ليكن Δ مميز للمعادلة (1) ذات الجهول x .
 $\Delta = 6^2 - 4(3)(-y) = 36 + 12y$
بمان $y > -3$ فإن $\Delta > 0$ وبالتالي المعادلة (1) لها حلان مختلفان x_1 و x_2 حيث $x_2 = \frac{-6 - \sqrt{12y + 36}}{6}$ ، $x_1 = \frac{-6 + \sqrt{12y + 36}}{6}$
من أجل كل $y \geq 0$ يكون $x_1 > 0$ و بالتالي x_1 لا ينتمي إلى $]-\infty, -1[$ و عليه x_2 مقبول
إذن $x_2 = f^{-1}(y) = \frac{-6 - \sqrt{12y + 36}}{6}$
الدالة f^{-1} قابلة للاشتقاق على $J=f(I)$ ولدينا $(f^{-1})'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{9+3x}}$
إذن $(f^{-1})'(0) = \frac{-1}{2\sqrt{9}} = -\frac{1}{6}$

3-4 مشتق الدالة الجذرية \sqrt{u} و الدالة u^n مع $n \in \mathbb{Z}^*$

مبرهنة 1

u دالة موجبة تماما و قابلة للاشتقاق على مجال I .
إذن الدالة f المعرفة بـ $f(x) = \sqrt{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على مجال I
و من أجل كل x من I لدينا $f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

الإثبات

نوضع $g(x) = \sqrt{x}$ يمكن كتابة f على الشكل $g \circ u$ و بتطبيق قاعدة مشتق الدالة المركبة نجد $(g \circ u)'(x) = u'(x)g'(u(x)) = u'(x) \times \frac{1}{2\sqrt{u(x)}}$

ملاحظة

لعرفة إن كانت الدالة $f = \sqrt{u}$ قابلة للاشتقاق عند x_0 حيث $u(x_0) = 0$ ندرس نهاية النسبة $r(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ لا x يؤول إلى x_0 .

مثال -

(1) f دالة معرفة بـ $f(x) = \sqrt{x-2}$ ، $D_f = [2, +\infty[$

يمكن كتابة $f(x) = \sqrt{u(x)}$ مع $u(x) = x-2$ ، وبالتالي الدالة f قابلة للاشتقاق على $[2, +\infty[$ و موجبة تماما و قابلة للاشتقاق على $[2, +\infty[$ و يبقى لنا دراسة قابلية اشتقاق الدالة f عند $x_0 = 0$

لذلك ندرس نهاية النسبة $\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ لا x يؤول إلى 2

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-2}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x-2}} = +\infty$$

إذن f غير قابلة للاشتقاق عند x_0 . وبالتالي f قابلة للاشتقاق على $[2, +\infty[$

(2) f دالة معرفة بـ $f(x) = \sqrt{(x+1)^4}$ ، $D_f = \mathbb{R}$

الدالة f تكتب على الشكل $f(x) = \sqrt{u(x)}$ مع $u(x) = (x+1)^4$ و $u(-1) = 0$ ، الدالة u موجبة تماما و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R} - \{-1\}$ و بالتالي f قابلة

للاشتقاق على $\mathbb{R} - \{-1\}$ لكن $f(x) = (x+1)^2$ إذن الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} .

مبرهنة (2)

u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و n عدد صحيح غير معدوم .

إذن الدالة f المعرفة بـ $f(x) = (u(x))^n$ قابلة للاشتقاق على I

و لدينا $f'(x) = n \times u'(x) \times (u(x))^{n-1}$.

الإثبات

- حالة $n \in \mathbb{N}$:

بوضع $g(x) = x^n$ يمكن كتابة f على الشكل $f = g \circ u$

من أجل كل x من I لدينا $g'(x) = nx^{n-1}$ و منه $g'(u(x)) = nu^{n-1}(x)$.

إذن من أجل كل x من I لدينا $f'(x) = n(u(x))^{n-1} \times u'(x)$.

- حالة n عدد صحيح سالب و $u(x)$ غير معدوم على I

$$f(x) = (u(x))^n = \frac{1}{(u(x))^{-n}}$$

بما أن $-n > 0$ فإن حسب الحالة الأولى ،

$$[(u(x))^{-n}]' = (-n)u'(x)(u(x))^{-n-1}$$

$$f'(x) = \frac{n u'(x) (u(x))^{-n-1}}{(u(x))^{-2n}}$$

$$f'(x) = n [u(x)]^{n-1} \times u'(x)$$

مبرهنة (3)

u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I .

إذن الدالتان $\sin u$ و $\cos u$ قابلتان للاشتقاق على I

و لدينا $(\sin u)' = u' \cos u$ و $(\cos u)' = -u' \sin u$

الإثبات

الدالة $\cos u$ من الشكل $v \circ u$ حيث $v(x) = \cos x$ ، v قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} و لدينا

$$v'(x) = -\sin x \text{ منه } v'(u(x)) = -\sin u(x) \times u'(x)$$

بنفس الكيفية نثبت العلاقة الثانية

مثال -

$$(\cos(ax+b))' = -a \sin(ax+b)$$

$$(\sin(ax+b))' = a \cos(ax+b) \text{ و}$$

تمرين تدريبي

في كل حالة من الحالات التالية عين الدالة المشتقة للدالة f

$$(1) f(x) = \sqrt{x^2+x+1} \text{ . (ب) } f(x) = (2x^2+x)^4$$

$$(ج) f(x) = \sin^2 x \text{ . (د) } f(x) = \frac{1}{(x^2+x+1)^2}$$

الحل

(1) يمكن كتابة $f(x) = \sqrt{u(x)}$ مع $u(x) = x^2+x+1$

الدالة f معرفة إذا كان $u(x) \geq 0$

لكن من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا $u(x) \geq 0$

إذن الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} .

بالتالي من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$$

(ب) يمكن كتابة $f(x) = (u(x))^4$ حيث $u(x) = 2x^2+x$

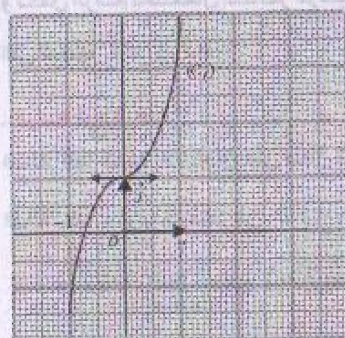
الدالة u معرفة و قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}

إذن الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}

و من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا $f'(x) = 4(u(x))^3 (2x+1)$

4-5 نقطة الانعطاف

إذا كانت f قابلة للاشتقاق مرتين على المجال I وكانت $f''(x)$ تتعدم عند x_0 من I مغيرة إشارتها في جوار x_0 فإن المنحني البياني (C_f) للدالة f له نقطة انعطاف $A(x_0, f(x_0))$ وللمماس لـ (C_f) عند A يخترق (C_f) .

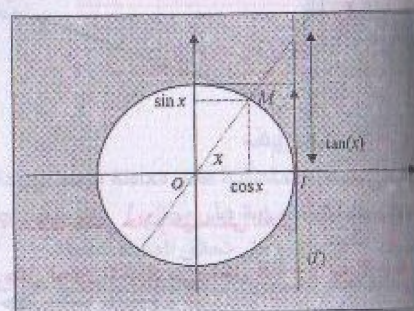


مثال -
 $f(x) = 3x^3 + 1$ دالة معرفة بالعلاقة
 f دالة قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}
 ومن أجل كل x من \mathbb{R} لدينا:
 $f'(x) = 9x^2$ و $f''(x) = 18x$
 $f''(x) = 0$ يكافئ $x = 0$
 $f''(x)$ يتعدم عند $x_0 = 0$ مغيرة
 إشارته في جوار 0 ومنه النقطة
 $A(0, 1)$ نقطة انعطاف للمنحني (C_f) .

4-6 دالة الظل tan

دالة الظل التي نرمز لها بـ \tan معرفة بـ $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ من أجل كل x من \mathbb{R} و $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ مع k عدد صحيح واليك بعض قيم \tan من أجل قيم شهيرة لـ x .

| x | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|----------|---|----------------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| $\tan x$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | |



خواص:

- من أجل كل x يختلف عن $\frac{\pi}{2} + k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$ لدينا:
 $\tan(x + \pi) = \tan(x)$ نقول عندئذ أن الدالة \tan دورية ودورها π .
- من أجل كل x يختلف عن $\frac{\pi}{2} + k\pi$ لدينا $\tan(-x) = -\tan(x)$ نقول عندئذ أن الدالة \tan فردية

(ج) يمكن كتابة $f(x) = (u(x))^2$ مع $u(x) = \sin x$

الدالة u معرفة وقابلة للاشتقاق على \mathbb{R}

إذن الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على \mathbb{R}

ومن أجل كل x من \mathbb{R} لدينا $f'(x) = 2(\cos x)(\sin x)$.

(د) يمكن كتابة $f(x) = \frac{1}{(u(x))^2}$ مع $u(x) = x^2 + x + 1$

من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا $u(x) > 0$

الدالة u قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} .

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $f'(x) = -2(2x+1)(x^2+x+1)^{-3}$.

4-4 المشتقات المتتابة لدالة

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي x

من I العدد الحقيقي $f'(x)$ تسمى الدالة المشتقة الأولى للدالة f

وإذا كانت f'' قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي x من

I العدد الحقيقي $(f''(x))$ تسمى الدالة المشتقة الثانية للدالة f ونرمز لها بـ f'' أو $f^{(2)}$

وهكذا إذا قبلت الدالة f الاشتقاق n مرة

حيث $n \geq 2$ على المجال I فإن الدالة المشتقة النونية للدالة f نرمز لها بـ $f^{(n)}$ و نكتب:

من أجل كل $n \geq 2$ ومن أجل كل x من I لدينا $f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'$ و $f^{(1)}(x) = f'(x)$

ملاحظة

في الحركات لـ $f(t)$ تمثل المسافة المقطوعة من طرف متحرك على خط مستقيم من

اللحظة الابتدائية حتى اللحظة t فإن العددين $f'(t)$ و $f''(t)$ يمثلان على التوالي

السرعة اللحظية و التسارع اللحظي للمتحرك في اللحظة t حيث:

$$f''(t) = \frac{d^2 f}{dt^2} \text{ و } f'(t) = \frac{df}{dt}$$

مثال -

$f(x) = x^4$ دالة معرفة على \mathbb{R} بالعلاقة

الدالة f قابلة للاشتقاق n مرة

وأنه من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا:

$$f^{(4)}(x) = 24, f^{(3)}(x) = 24x, f^{(2)}(x) = 12x^2, f^{(1)}(x) = 4x^3$$

ومن أجل كل عدد طبيعي $n \geq 5$ لدينا $f^{(n)}(x) = 0$

التمثيل البياني للدالة \tan

النقطتان ذاتا الإحداثيات $(x, \tan x)$ و $(-x, \tan(-x))$ تنتميان إلى منحنى الدالة \tan ومتناظرتان بالنسبة إلى البدا O إذن (γ) يقبل O كمركز تناظر له ولإنشاء المنحنى (γ) نرسمه أولا في مجال $[0, \frac{\pi}{2}]$ ونكمل الرسم باستعمال التناظر المركزي الذي مركزه النقطة O وبإنشاءات المتوالية التي أشعتها $\pi \vec{i}$ و $-\pi \vec{i}$

دراسة الدالة \tan

الدالة \tan قابلة للاشتقاق على مجال تعريفها ولدينا $(\tan x)' = 1 - \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

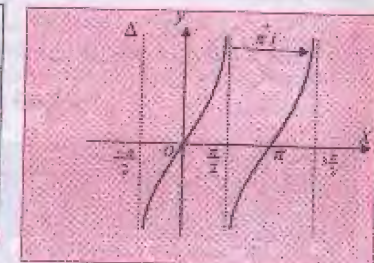
الدالة \tan متزايدة تماما لأن $\frac{1}{\cos^2 x} > 0$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \cos x = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \sin x = 1 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$$

المستقيمات ذات المعادلة $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$ مقاربة عمودية لـ (γ)

و إليك جدول تغيرات \tan على $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ و منحناها البياني:

| x | $-\frac{\pi}{2}$ | 0 | $+\frac{\pi}{2}$ |
|-----------|------------------|-----|------------------|
| $\tan' x$ | + | | + |
| $\tan x$ | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |



خاصية :

- (1) من أجل كل عدد حقيقي α المعادلة $\tan x = \alpha$ تقبل حلا وحيدا على المجال $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
- (2) إذا كان α حلا للمعادلة $\tan x = \alpha$ فإن كل الحلول الأخرى من الشكل $\alpha + k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$

تمرين تدريبي

(1) ادرس تغيرات الدالة f المعرفة على $I = [0, \frac{\pi}{2}]$ بالمعادلة $f(x) = \tan x + 2x$
(ب) برهن أن لـ (C_f) له مستقيما مقاربا عموديا ثم ارسم (C_f)

الحل

الدالة f قابلة للاشتقاق على $[0, \frac{\pi}{2}]$ لأنها مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على I هما :

$$x \mapsto \tan x \text{ و } x \mapsto -2x$$

و من أجل كل x من I لدينا $f'(x) = -1 + \tan^2 x$

$f'(x) = (\tan x - 1)(\tan x + 1)$ نكتب على شكل

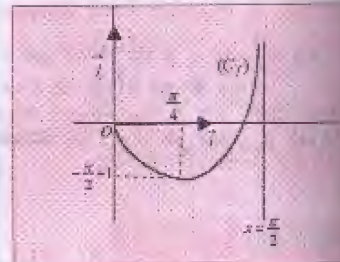
من أجل كل x من I لدينا $\tan x + 1 > 0$

إذا كان $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ فإن $\tan x - 1 > 0$ وإذا كان $0 < x < \frac{\pi}{4}$ فإن $\tan x - 1 < 0$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2} + 1, f(0) = 0, \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$$

(ب) بمان $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$ فإن المستقيم ذا المعادلة $x = \frac{\pi}{2}$ مقارب عمودي لـ (C_f)

| x | 0 | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---------|---|--------------------|-----------------|
| $f'(x)$ | | - | + |
| $f(x)$ | 0 | $-\frac{\pi}{2}+1$ | $+\infty$ |



6 - المعادلات التفاضلية

1 - تعريف

نسمي معادلة تفاضلية كل معادلة تربط بين دالة و مشتقاتها.

حل معادلة تفاضلية على مجال I يعني إيجاد كل الدوال f القابلة للاشتقاق n مرة على I حيث $n \in \mathbb{N}^*$ والتي تحقق المعادلة المعطاة.

في هذه الفقرة نتطرق إلى المعادلات التفاضلية من الشكل $y' = f(x)$ و $y'' = f(x)$ مع f دالة مألوفة.

2 - 6 المعادلات التفاضلية من الشكل $y' = f(x)$

نضع (1) $y' = f(x)$

إذا كانت g حلا للمعادلة (1) فإن $g'(x) = f(x)$

إذا كان h حلا آخر للمعادلة (1) فإن $h'(x) = f(x)$

ومنه نستنتج $g'(x) = H(x)$ أي $h(x) = g(x) + c$ مع $c \in \mathbb{R}$.

- في حالة $f(x) = x^2$ تصبح لدينا $y' = x^2$ تصحيح

الدالة g التي مشتقتها تساوي x^2 هي $\frac{1}{3}x^3$.

ومنه المعادلة $y' = x^2$ حلولها من الشكل $h(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$.

- في حالة $f(x) = \sqrt{x}$ المعادلة (1) تصبح $y' = \sqrt{x}$.

الدالة g المعرفة على $[0, +\infty[$ والتي مشتقتها تساوي \sqrt{x} هي $g(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$.

وبالتالي حلول المعادلة $y' = \sqrt{x}$ هي $h(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c$ مع $c \in \mathbb{R}$.

- في حالة $f(x) = \sin x$ المعادلة (1) تصبح $y' = \sin x$.

الدالة g المعرفة على \mathbb{R} والتي مشتقتها تساوي $\sin x$ هي $g(x) = -\cos x$.

ومنه حلول المعادلة $y' = \sin x$ هي $h(x) = -\cos x + c$ مع $c \in \mathbb{R}$.

- في حالة $f(x) = \cos x$ المعادلة (1) تصبح لدينا $y' = \cos x$.

الدالة g المعرفة على \mathbb{R} والتي مشتقتها تساوي $\cos x$ هي $g(x) = \sin x$.

ومنه حلول المعادلة $y' = \cos x$ هي الدوال h حيث $h(x) = \sin x + c$ مع $c \in \mathbb{R}$.

- في حالة $f(x)$ كثير حدود من الدرجة n حلول المعادلة $y' = f(x)$ هي الدوال g المعرفة على \mathbb{R} حيث $g(x)$ كثير حدود من الدرجة $(n+1)$.

إذا كان $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ فإن

$$g(x) = \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \dots + \frac{a_1}{2} x^2 + a_0 x + c$$

لأن من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا $g'(x) = f(x)$.

ومنه الدوال g هي حلول المعادلة $y' = f(x)$.

مثال

$$(1) \quad y' = x^2 + x + 1 \quad \dots$$

حلول المعادلة التفاضلية (1) هي الدوال g المعرفة على \mathbb{R} بـ

$$g(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + c \quad \text{و} \quad c \in \mathbb{R}$$

3-6 المعادلة التفاضلية من الشكل $y' = f(x)$

لحل المعادلة $y' = f(x)$ نتبع ما يلي :

نبحث عن حلول المعادلة $K' = f(x)$ ثم نبحث عن حلول المعادلة $y' = K(x)$ لأن

$$y' = (y')' = (K(x))' = f(x)$$

أ حالة $f(x) = \cos x$

حلول المعادلة $K' = f(x)$ هي الدوال g المعرفة على \mathbb{R} بـ $g(x) = \sin x + c$.

حلول المعادلة $y' = \sin x + c$ هي الدوال h المعرفة على \mathbb{R} بـ $h(x) = -\cos x + cx + d$.

حيث c و d عددين حقيقيين.

لأن الدوال h هي حلول المعادلة $y' = \cos x$.

أ حالة $f(x) = \sin x$

نفس الكيفية السابقة نجد حلول هذه المعادلة التي هي الدوال من الشكل :

$$h(x) = -\sin x + cx + d$$

أ حالة $f(x) = \sqrt{x}$

حلول المعادلة $K' = \sqrt{x}$ هي الدوال g المعرفة على $[0, +\infty[$ بـ $g(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$.

حلول المعادلة $y' = K$ هي الدوال h المعرفة على $[0, +\infty[$ بـ $h(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + cx + d$.

لأن الدوال h هي حلول المعادلة التفاضلية $y' = \sqrt{x}$.

أ حالة $f(x) = x^2$

حلول المعادلة $y' = x^2$ هي الدوال h المعرفة على \mathbb{R} بـ $h(x) = \frac{1}{12}x^4 + cx + d$.

حيث c و d عددين حقيقيين.

تمرين تدريبي

عين الحل الخاص للمعادلة $y' = x^2$ الذي يحقق $y(0) = 1$ و $y(1) = 2$.

الحل

حلول المعادلة التفاضلية $y' = x^2$ هي الدوال h المعرفة على \mathbb{R} بـ

$$h(x) = \frac{1}{12}x^4 + cx + d$$

من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا $h(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$.

$d = 1$ يكافئ $y(0) = 1$.

$y(1) = 2$ يكافئ $\frac{1}{3} + c = 2$ يكافئ $c = \frac{5}{3}$.

لأن الحل الخاص المطلوب هو $h(x) = \frac{1}{12}x^4 + \frac{5}{3}x + 1$.

7 - البحث عن الحل التقريبي للمعادلة $y' = y$

مثال -

نعتبر المعادلة $y' = y$ ونضيف الشرط الابتدائي $y(0) = 1$.
حل هذه المعادلة هو إذن دالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} بحيث $f(0) = 1$
و من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا $f'(x) = f(x)$.
نستعمل طريقة أولر من أجل إنشاء حل تقريبي على المجال $[0, 1]$ بخطوة $h = \frac{1}{n}$
حيث n عدد طبيعي غير معدوم.
نعرف المتتالية (x_p) بـ $x_p = x_{p-1} + h$ و $x_0 = 0$ و $x_n = 1$.
و نحسب القيم التقريبية y_1, y_2, \dots, y_n للأعداد $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$
بواسطة التقريب التآلفي للدالة f .
بما أن $f(0) = 1$ فإننا نضع $y_0 = 1$.
(1) احسب y_1 .
(2) أوجد علاقة تربط بين y_k و y_{k+1} ثم استنتج عبارة y_k بدلالة k .
ب- نفرض أن $n = 10$ احسب قيم y_k حيث $k \geq 1$.
ج- أنشئ النحنى التقريبي لحل المعادلة $y' = y$ على المجال $[0, 1]$.

الحل

(1) لدينا $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + h \times f'(x_0)$
وبما أن $f'(x) = f(x)$ من أجل كل x من $[0, 1]$ فإن
 $y_1 = f(x_0)(1 + h) = 1 + h = 1 + \frac{1}{n}$ إذن $f(x_0 + h) \approx f(x_0)(1 + h)$

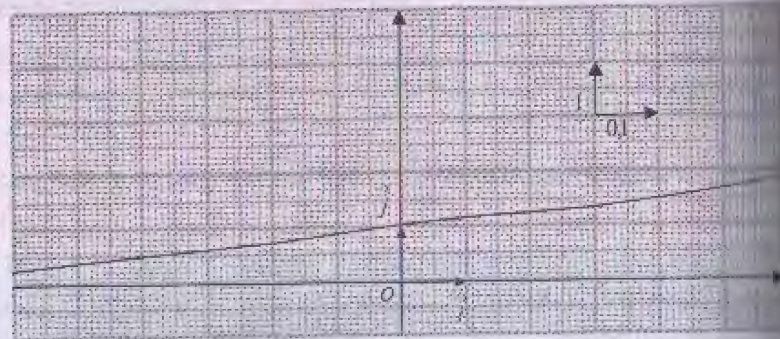
(2) أ- $f(x_k + h) \approx f(x_k) + h f'(x_k)$
وبما أن $f'(x_k) = f(x_k)$ فإن $f(x_k + h) \approx (1 + h) \times f(x_k) \approx (1 + h) y_k$
إذن $y_{k+1} = (1 + h) y_k$ (*)
من المساواة (*) نستنتج أن (y_k) متتالية هندسية أساسها $(1 + h)$
و عليه نكتب $y_k = y_0 (1 + h)^k$ أي $y_k = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k$
ب- بما أن $n = 10$

$$y_k = \left(1 + \frac{1}{10}\right)^k = (1,1)^k$$

ج- النحنى التقريبي للدالة f مشكل من القطع $[M_k, M_{k+1}]$ حيث
 $M_k(x_k, y_k)$ و $n - 1 \geq k \geq 0$

| k | y _k | k | y _k |
|---|----------------|----|----------------|
| 0 | 1 | 6 | 1,77 |
| 1 | 1,10 | 7 | 1,94 |
| 2 | 1,21 | 8 | 2,14 |
| 3 | 1,33 | 9 | 2,35 |
| 4 | 1,46 | 10 | 2,59 |
| 5 | 1,61 | | |

نلاحظ أنه كلما صغرت الخطوة h كلما كانت القيم
 y_0, \dots, y_n قريبة من $f(x_0), \dots, f(x_n)$ على
التوالي.
الدالة التي تحقق $y' = y$ و $y(0) = 1$ تسمى الدالة
الأسية و التي نرمز بـ \exp .



8 - البحث عن الحل التقريبي للمعادلة $y' = \frac{1}{x}$

مثال -

نعتبر المعادلة $y' = \frac{1}{x}$ ونضيف الشرط الابتدائي $y(1) = 0$.
حل هذه المعادلة هو إذن دالة f قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ بحيث $f(1) = 0$
و من أجل كل x من $]0, +\infty[$ لدينا $f'(x) = \frac{1}{x}$.
نستعمل طريقة أولر من أجل إنشاء حل تقريبي على المجال $[1, 2]$ بخطوة
 $h = 0,1$.
نعرف المتتالية (x_p) بـ $x_p = x_{p-1} + 0,1$ مع $x_0 = 1$ و $10 \geq p \geq 1$
و لتكن y_0, y_1, \dots, y_{10} القيم التقريبية للأعداد $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_{10})$ على
التوالي مع $y_0 = 0$.
(1) احسب y_1 .
(2) بين أن $y_{p+1} = y_p + \frac{h}{x_p}$ ثم أعط جدولاً تبين فيه قيم x_p, y_p ثم ارسم النحنى
التقريبي لـ f .

تطبيقات نموذجية



تطبيق 1 دراسة قابلية الاشتقاق

ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند العدد a في كل حالة من الحالات التالية

(أ) $f(x) = x^2\sqrt{x}$ عند $a=0$ ، (ب) $f(x) = x|x|$ عند $a=0$

(ج) $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$ عند $a=0$ ، (د) $f(x) = \frac{x^2-|x|}{x^2+2}$ عند $a=0$

(هـ) عند $a=0$ $\begin{cases} f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} , x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

الحل

f تقبل الاشتقاق عند عدد a يعني أن النسبة $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ لها نهاية حقيقية عند a

من أجل كل x من D_f و $x \neq 0$ لدينا $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^2\sqrt{x}}{x} = x\sqrt{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} x\sqrt{x} = 0$$

ومنه الدالة f قابلة للاشتقاق على يمين الصفر

بما أن عبارة $f(x)$ تتغير في جوار الصفر فإننا ندرس الاشتقاق من اليمين و من اليسار عند الصفر

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x = 0 = \ell_1$$

لأن الدالة f قابلة للاشتقاق من اليسار عند 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2-0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 = \ell_2$$

لأن الدالة f قابلة للاشتقاق على يمين الصفر.

بما أن $\ell_1 = \ell_2$ فإن f قابلة للاشتقاق عند $a=0$.

من أجل كل x من $D_f = [0, 1[$ يمكن كتابة $f(x) = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} = 0$$

لأن الدالة f قابلة للاشتقاق على يمين الصفر.

الحل

(1) $f(x_0+h) \approx f(x_0) + h \times f'(x_0)$ لكن $f'(x_0) = f'(x_0)$ ومنه ينتج ،

$y_1 = y_0 + \frac{h}{x_0} = \frac{h}{x_0} = 0,1$ لأن $f(x_0+h) \approx f(x_0) + \frac{h}{x_0}$

(2) $f(x_p+h) \approx f(x_p) + \frac{h}{x_p} \approx y_p + \frac{h}{x_p}$

ومنه $y_{p+1} = y_p + \frac{h}{x_p}$

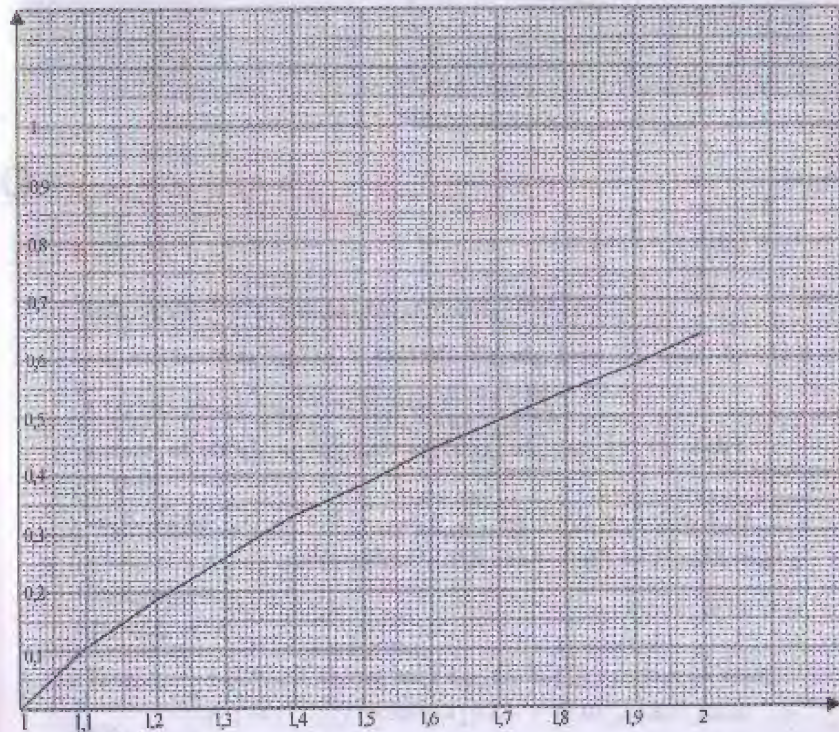
النحني التقريبي للدالة f مشكل من

تسلسل القطع $[M_k, M_{k+1}]$

حيث $9 \geq k \geq 0$ و $M_k(x_k, y_k)$

تسمى الدالة f التي تحقق $y' = \frac{1}{x}$ و $f(1) = 0$ بالدالة اللوغاريتمية النيبيرية و نرسم لها بـ

"Ln"



(د) مجموعة تعريف الدالة f هي $D_f = \mathbb{R}$.

بما أن عبارة $f(x)$ تتغير في جوار الصفر فإننا ندرس قابلية اشتقاق f من اليمين و من اليسار عند الصفر.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + x}{(x^2 + 2)x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{x^2+2} = \frac{1}{2} = \ell_1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - x}{(x^2 + 2)x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-1}{x^2+2} = -\frac{1}{2} = \ell_2$$

بما أن $\ell_1 \neq \ell_2$ فإن f غير قابلة للاشتقاق عند الصفر.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} \quad (\text{هـ})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\sin X}{X} = 0$$

مع $X = \frac{1}{x}$ إذن الدالة f قابلة للاشتقاق عند الصفر.

تعيين الدالة المشتقة

عين الدالة المشتقة للدالة f على المجال المعطى في كل حالة من الحالات التالية:

$$I = \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = x^3 + 3x^2 - 6x + 4 \quad (\text{أ})$$

$$I = \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + x - 1}{x^2 + 1} \quad (\text{ب})$$

$$I = \left[0, \frac{\pi}{2} \right] \quad \text{على} \quad f(x) = \frac{\cos x}{\sin x - 1} \quad (\text{ج})$$

$$I = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\quad , \quad f(x) = \frac{1}{\cos x} \quad (\text{د})$$

الحل

(أ) الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $f'(x) = 3x^2 + 6x - 6$.

(ب) الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} لأنها دالة ناطقة و من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا،

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x^2 - 6x + 1)(x^2 + 1) - 2x(x^3 - 3x^2 + x - 1)}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{x^4 - 12x^3 + 2x^2 - 4x - 1}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

(أ) الدالتان $x \mapsto \cos x - 1$ و $x \mapsto \sin x - 1$ قابلتان للاشتقاق على I ولدينا:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(-\sin x)(\sin x - 1) - (\cos x)\cos x}{(\sin x - 1)^2} \\ &= \frac{-1 + \sin x}{(\sin x - 1)^2} = \frac{1}{\sin x - 1} \end{aligned}$$

(ب) الدالة $x \mapsto \cos x$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا $f'(x) = \frac{-\sin x}{\cos^2 x}$

تعيين معادلة المماس

اكتب معادلة المماس لـ (C_f) منحنى الدالة f عند النقطة ذات الفاصلة المعطاة في كل حالة من الحالات التالية

$$a=1 \quad , \quad f(x) = x^2\sqrt{x} \quad (\text{ب}) \quad , \quad a=0 \quad , \quad f(x) = x^3 + x^2 - 2x \quad (\text{أ})$$

$$a=2 \quad , \quad f(x) = \frac{x}{x^2+2} \quad (\text{د}) \quad , \quad a=\frac{\pi}{4} \quad , \quad f(x) = x \cos x \quad (\text{ج})$$

الحل

(أ) قيمت f للاشتقاق عند a فإن منحناها (C_f) يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة a

$$\text{معادلته } y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $f'(x) = 3x^2 + 2x - 2$ و منه $f'(0) = -2$

إذن (C_f) يقبل مماس (d) عند $A(0, 0)$ معادلته $y = -2x$.

الدالتان $x \mapsto \sqrt{x}$ و $x \mapsto x^2$ قابلتان للاشتقاق على $]0, +\infty[$

و بالتالي الدالة $f = u \times v$ قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ ولدينا $f'(x) = 2x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2\sqrt{x}}$

$$\text{إذن } f'(1) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

(C_f) يقبل مماس (d) عند النقطة $A(1, 1)$ معادلته $y = \frac{5}{2}(x-1) + 1$

الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} لأنها جداء دالتين قابلتين للاشتقاق على \mathbb{R} هما

$$f(x) = \cos x - x \sin x \quad \text{نجد } x \mapsto x \quad , \quad x \mapsto \cos x$$

$$\text{و منه } f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

منه (C_f) يقبل مماسا عند النقطة $A\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi\sqrt{2}}{8}\right)$ معادلته

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi\sqrt{2}}{8}$$

(د) الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} لأنها قسمة دالتين قابلتين للاشتقاق على \mathbb{R} هما:

$$f(x) = \frac{-x^2 + 2}{(x^2 + 2)^2} \quad \text{و} \quad x \mapsto x^2 + 2 \quad \text{و} \quad x \mapsto x$$

ومنه معادلة المماس للمنحني (C_f) عند $A\left(2, \frac{1}{3}\right)$ هي $y = \frac{-1}{18}(x-2) + \frac{1}{3}$

تطبيق 4

المماس المشترك لمنحنيين

(1) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ و $g(x) = \frac{8}{x} + 1$ دالتان معرفتان على المجال $]-\infty, 0[$ و $]0, +\infty[$ بين أن المنحنيين الممثلين لـ f و g يقبلان مماسين متوازيين عند النقطة ذات الفاصلة -1

(2) $K(x) = \cos x + 1$ و $h(x) = x^3 + 2$ دالتان معرفتان على \mathbb{R} بين أن المنحنيين الممثلين لـ K و h يقبلان نفس المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0.

الحل

(1) الدالتان f و g قابلتان للاشتقاق على المجال $]-\infty, 0[$ و $]0, +\infty[$

و من أجل كل x من $]-\infty, 0[$ لدينا $f'(x) = 6x - 2$ و $g'(x) = \frac{-8}{x^2}$

المنحنيين (C_f) و (C_g) لهما مماسان متوازيان عند النقطة ذات الفاصلة -1 يعني أن $g'(-1) = f'(-1)$

بما أن $f'(-1) = -8$ و $g'(-1) = -8$ فإن (C_f) و (C_g) لهما مماسان متوازيان ميلهما -8 عند النقطة ذات الفاصلة -1

(2) الدالتان K و h قابلتان للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $K'(x) = -\sin x$ و $h'(x) = 3x^2$

ومنه ينتج $K'(0) = 0$ و $h'(0) = 0$ و $K(0) = 2$ و $h(0) = 2$

إذن (C_h) و (C_K) لهما نفس المماس (d) معادلته $y = 2$

تطبيق 5

تعيين مماس موازي لتسليم معلوم

(C_f) المنحني البياني للدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = \frac{x^3 + |x|}{x^2 + 2}$

(1) اعط معادلة المماس للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

(2) هل توجد مماسات لـ (C_f) موازية للمستقيم ذي المعادلة $y = -\frac{1}{4}x$

(3) هل توجد مماسات لـ (C_f) موازية للمستقيم ذي المعادلة $y = -2x$

الحل

(1) معادلة المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 هي $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $f'(x) = \frac{2-x^2}{(2+x^2)^2}$

$f'(1) = \frac{1}{9}$ و $f(1) = \frac{2}{3}$ ومنه معادلة المماس هي $y = \frac{1}{9}x - \frac{7}{9}$

(2) هل المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 هو $y = -\frac{1}{4}x$

المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 يوازي المستقيم ذا المعادلة $y = -\frac{1}{4}x$

يعني $f'(x_0) = -\frac{1}{4}$

$$f'(x_0) = -\frac{1}{4} \quad \text{يكافئ} \quad \frac{2-x_0^2}{(2+x_0^2)^2} = -\frac{1}{4} \quad \text{يكافئ} \quad x_0^4 + 12 = 0$$

بما أن $x_0^4 + 12 > 0$ فإن المعادلة $x_0^4 + 12 = 0$ ذات المجهول x_0 ليس لها حلول في \mathbb{R} و

بالتالي لا يوجد مماس لـ (C_f) يوازي المستقيم ذا المعادلة $y = -\frac{1}{4}x$

(3) هل المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 يوازي المستقيم ذا المعادلة $y = -2x$

هذا معناه أن $f'(x_0) = -2$

$$f'(x_0) = -2 \quad \text{يكافئ} \quad \frac{2-x_0^2}{(2+x_0^2)^2} = -2 \quad \text{يكافئ} \quad -2x_0^4 - 7x_0^2 - 10 = 0 \quad (1)$$

نضع $x_0^2 = X_0$ المعادلة (1) تصبح $-2X_0^2 - 7X_0 - 10 = 0$

$$\Delta = 49 - 4(-2)(-10) < 0$$

بما أن $\Delta < 0$ فإن المعادلة $-2X_0^2 - 7X_0 - 10 = 0$ ليس لها حلول في \mathbb{R} .

وبالتالي لا يوجد مماس لـ (C_f) يوازي المستقيم $y = -2x$

تطبيق 6

دراسة قابلية الاشتقاق و حساب العدد المشتق

f دالة معرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = \frac{x^3 + |x|}{x^2 + 2}$

(1) هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد 0؟ فسر هئليا هذه النتيجة.

(2) احسب $f'(x)$ من أجل كل $x \neq 0$

✓ الحل

(1) بما أن الدالة f تغير عبارتها في جوار الصفر فإننا ندرس قابلية اشتقاق f من يمين و من يسار الصفر.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - x}{x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 1}{x^2 + 2} = -\frac{1}{2} = \ell_1$$

منه f قابلة للاشتقاق من اليسار عند الصفر.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x}{(x^2 + 2)x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x + 1}{x^2 + 2} = \frac{1}{2} = \ell_2$$

ومن ثم f قابلة للاشتقاق من اليمين عند الصفر.

بما أن $\ell_2 \neq \ell_1$ فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند الصفر و (C_f) له نصفاً مماسين ميلها ℓ_1 و ℓ_2 .

$$(2) \text{ بما أن } \begin{cases} f(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 + 2}, & x \geq 0 \\ f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 + 2}, & x \leq 0 \end{cases} \text{ فإن } \begin{cases} |x| = x, & x \geq 0 \\ |x| = -x, & x \leq 0 \end{cases}$$

الدالة $x \mapsto \frac{x^2 + x}{x^2 + 2}$ قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ ولدينا $\left(\frac{x^2 + x}{x^2 + 2}\right)' = \frac{-x^2 + 4x + 2}{(x^2 + 2)^2}$

الدالة $x \mapsto \frac{x^2 - x}{x^2 + 2}$ قابلة للاشتقاق على $] -\infty, 0[$ ولدينا $\left(\frac{x^2 - x}{x^2 + 2}\right)' = \frac{x^2 + 4x - 2}{(x^2 + 2)^2}$

$$\text{لأن } \begin{cases} f'(x) = \frac{-x^2 + 4x + 2}{(x^2 + 2)^2}, & x > 0 \\ f'(x) = \frac{x^2 + 4x - 2}{(x^2 + 2)^2}, & x < 0 \end{cases}$$

ملاحظة: المماس العمودي للمنفذ

تطبيق 7

f دالة معرفة على المجال $[1, +\infty[$ بـ $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$ و (C_f) تمثيلها البياني

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x - x^2}}$$

(أ) بين أن $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}$ هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند الواحد؟

فسر هندسياً النتيجة المحصل عليها سابقاً.

✓ الحل

$$\frac{f(x)}{x-1} = \frac{\sqrt{x^2 - x}}{x-1} = \frac{x^2 - x}{(x-1)\sqrt{x^2 - x}} = \frac{x(x-1)}{(x-1)\sqrt{x^2 - x}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x^2 - x} = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{\sqrt{x^2 - x}} = +\infty$$

نستنتج من نتيجة السؤال (ب) أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق على يمين الواحد و المنحنى (C_f) يقبل نصف مماس عند النقطة ذات الفاصلة 1 يوازي محور الترتيب.

ملاحظة: التقريب التآلفي

تطبيق 8

f دالة معرفة على \mathbb{R} بحيث $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ و $f(1) = 2$ باستعمال خطوة قدرها 0,1

أوجد القيمة التقريبية لـ $f(1,1)$ و $f(1,2)$.

✓ الحل

لدينا $f(x+h) \approx f(x) + h f'(x)$ و عليه

$$f(1,1) \approx f(1) + 0,1 \times f'(1) \approx 2 + 0,1 \times \sqrt{2} \approx 2,141$$

$$f(1,2) \approx f(1,1) + 0,1 \times f'(1,1) \approx 2,141 + 0,1 \times \sqrt{2,21} \approx 2,289$$

ملاحظة: إنشاء المنحنى التقريبي باستعمال طريقة أولر

تطبيق 9

f دالة قابلة للاشتقاق على المجال $]-1, 1[$

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2} \text{ و } f(0) = 1$$

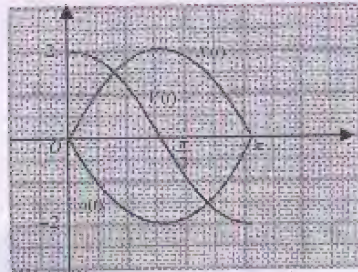
باستعمال طريقة أولر و بخطوة قدرها 0,2 عين القيمة التقريبية لـ $f(1)$

ثم انشئ التمثيل البياني القريب لـ (C_f) على المجال $[0, 1]$

✓ الحل

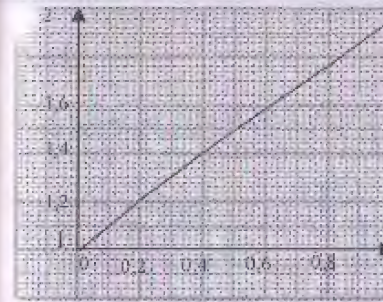
| | | | | | | |
|------|---|------|------|------|------|------|
| x | 0 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1 |
| f(x) | 1 | 1,20 | 1,40 | 1,58 | 1,74 | 1,86 |

(ب) ما هو التسارع $a(t)$ عند اللحظة t ؟
(ج) ما هي العلاقة التي تربط بين $X(t)$ و $a(t)$ ؟ ثم أنشئ في نفس العلم التمثيلات البيانية للحركة و التسارع و السرعة على المجال $[0, \pi]$.



$$\begin{aligned} v(t) &= (X(t))' \\ &= (2 \sin t)' = 2 \cos t \\ a(t) &= (v(t))' \\ &= (2 \cos t)' = -2 \sin t \\ a(t) &= (-2 \sin t) = -X(t) \end{aligned}$$

الحل



$$\begin{aligned} f(0,2) &\approx f(0) + 0,2 f'(0) \\ f(0,4) &\approx f(0,2) + 0,2 f'(0,2) \\ f(0,6) &\approx f(0,4) + 0,2 f'(0,4) \\ f(0,8) &\approx f(0,6) + 0,2 f'(0,6) \\ f(1) &\approx f(0,8) + 0,2 f'(0,8) \end{aligned}$$

منه القيمة التقريبية لـ $f(1)$ هي 1,86
التمثيل البياني القريب لـ (C_f) مشكل
من القطع $[M_K, M_{K+1}]$ مع $5 \geq K \geq 0$

تطبيق 10

معرفة إيجاد عبارة دالة

f دالة معرفة من أجل كل $x \neq 1$ بـ $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 1}{x-1}$ حيث a و b عدنان حقيقيان. أوجد a و b بحيث الدالة f لها قيمة حدية محلية معدومة عند -1 .

الحل

$$\begin{aligned} \text{بما أن الدالة } f \text{ لها قيمة حدية محلية معدومة عند } x = -1 \text{ فإن } f'(-1) = 0 \\ \text{وبما أن القيمة الحدية المحلية عند } x = -1 \text{ معدومة فإن } f(-1) = 0. \\ f(-1) = 0 \text{ تكافئ } \frac{a-b+1}{-2} = 0 \text{ يكافئ } a-b+1=0 \text{ (1)} \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{ax^2 - 2ax - b - 1}{(x-1)^2} \text{ ولدينا } D_f$$

$$f'(-1) = \frac{3a-b-1}{4}$$

$$(2) \dots 3a-b-1=0 \text{ يكافئ } f'(-1)=0$$

$$\text{من (1) نجد } a = -1 + b \text{ نعوضه في (2) نجد } b = 2$$

$$\text{إذن } a = -1 + 2 = 1 \text{ وبالتالي } f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x-1}$$

تطبيق 11

معرفة السرعة و التسارع اللحظيين

جسم معلق على خافة نابض بهتز أفقياً. معادلة حركته هي $X(t) = 2 \sin t$ مع X بالسنتيمتر و t بالثانية.
(1) ما هي السرعة $v(t)$ عند اللحظة t

نظرية القيم المتوسطة و حل المعادلات

تطبيق 12

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + \frac{5}{6} \text{ بـ } \mathbb{R} \text{ من أجل كل } x$$

(1) شكل جدول تغيرات f على \mathbb{R} .

(2) ما هو عند حلول المعادلة $f(x) = 0$ ؟

(3) نسمي α الحل الذي ينتمي إلى $]-\frac{1}{3}, 1[$ أعط حصراً لـ α بتقريب 10^{-2} .

الحل

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 \text{ ولدينا } \mathbb{R} \text{ قابلية للاشتقاق على } \mathbb{R}$$

$$f'(x) = (x-1)(3x+1) \text{ الشكل}$$

$$\text{إذا كان } x \in]-\infty, -\frac{1}{3}] \cup [1, +\infty[\text{ فإن } f'(x) \geq 0 \text{ و منه } f \text{ متزايدة تماماً على كل من}$$

| | | | | |
|---------------|-----------|-----------------|---------------|------------|
| x | $-\infty$ | $-\frac{1}{3}$ | 1 | $+\infty$ |
| إشارة $f'(x)$ | + | 0 | - | + |
| تغيرات f | | \nearrow | \searrow | \nearrow |
| | | $\frac{55}{54}$ | $\frac{1}{6}$ | $+\infty$ |

$$]-\infty, -\frac{1}{3}] \text{ و } [1, +\infty[$$

$$x \in [-\frac{1}{3}, 1] \text{ إذا كان}$$

$$\text{فإن } f'(x) \leq 0 \text{ و منه}$$

$$f \text{ متناقصة تماماً على}$$

$$[-\frac{1}{3}, 1]$$

(1) ادرس اتجاه تغيرات الدالة f

(2) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α ثم اعط حصراته بتقريب 10^{-2} و اوجد بطريقة جبرية القيمة الضبوطة لـ α

✓ الحل

(1) الدالة f معرفة على $[1, +\infty[$ وقابلة للاشتقاق على $]1, +\infty[$ ولدينا $f'(x) = \frac{2\sqrt{x-1}+1}{2\sqrt{x-1}}$ من أجل كل x من $]1, +\infty[$ لدينا $f'(x) > 0$ ومنه f متزايدة تماما على $]1, +\infty[$.
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $f(1) = -3$
 (2) - بما أن $f'(x) > 0$ و $f(1) = -3$ فإن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد α ينتمي إلى $]-3, +\infty[$.
 - نلاحظ أن $f(2) = -1$ و $f(3) = \sqrt{2} - 1$ ومنه α ينتمي إلى $]2, 3[$.
 - نستخدم طريقة المسح لتعيين قيمة تقريبية لـ α

| x | $f(x)$ |
|-----|---------|
| 2,0 | -1 |
| 2,1 | -0,8511 |
| 2,2 | -0,7045 |
| 2,3 | -0,5598 |
| 2,4 | -0,4167 |
| 2,5 | -0,27 |
| 2,6 | -0,1350 |
| 2,7 | +0,0038 |

$p = 0,1$

| x | $f(x)$ |
|------|---------|
| 2,60 | -0,1350 |
| 2,61 | -0,1211 |
| 2,62 | -0,1072 |
| 2,63 | -0,0932 |
| 2,64 | -0,0793 |
| 2,65 | -0,065 |
| 2,66 | -0,051 |
| 2,67 | -0,037 |
| 2,68 | -0,0238 |
| 2,69 | -0,01 |
| 2,70 | +0,0038 |

$p = 0,01$

إذن $2,68 < \alpha < 2,70$ ومنه $2,70$ هي القيمة التقريبية بالزيادة لـ α إلى 10^{-2} .

• $f(x) = 0$ يكافئ $x - 4 + \sqrt{x-1} = 0$

يكافئ $(4-x)^2 = x-1$ و $1 \geq x \geq 4$

يكافئ $x^2 - 9x + 17 = 0$

$\Delta = 81 - 4(17) = 81 - 68 = 13$

$x_1 = \frac{9 + \sqrt{13}}{2}$ و $x_2 = \frac{9 - \sqrt{13}}{2}$

x_1 مرفوض لأنه لا ينتمي إلى $[1, 4]$ إذن القيمة الضبوطة لـ α هي $\alpha = \frac{9 - \sqrt{13}}{2}$.

تطبيق 15

حساب مشتق الدوال المركبة

(1) عين الدالة المشتقة للدالة f المعرفة بالعبارة $f(x) = \frac{2x^2+1}{x-1}$

(2) استنتج الدالة المشتقة لكل دالة من الدوال التالية

(أ) $g(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x-1}}$ (ب) $h(x) = \frac{2x^2+1}{x^2-1}$

(ج) $K(x) = \sqrt{\frac{2x^2+1}{x-1}}$ (د) $L(x) = \frac{2(\cos x)^2+1}{\cos x-1}$

✓ الحل

(1) الدالة f قابلة للاشتقاق على D_f لأنها ناطقة و من أجل كل $x \in D_f$ لدينا:

$$f'(x) = \frac{4x(x-1) - (2x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{4x^2 - 4x - 2x^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 4x - 1}{(x-1)^2}$$

(أ) يمكننا وضع $g(x)$ على الشكل $g(x) = f(\sqrt{x})$.

$$g'(x) = (\sqrt{x})' f'(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{2(\sqrt{x})^2 - 4\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x}-1)^2} = \frac{2x - 4\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}$$

(ب) لدينا $h(x) = f(x^2)$ ومنه $h'(x) = f'(x^2) \cdot (x^2)' = 2x \cdot \frac{2x^2 - 4x - 1}{(x^2-1)^2}$

(ج) يمكننا وضع $K(x)$ على الشكل $K(x) = \sqrt{f(x)}$

$$K'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = \frac{\frac{2x^2 - 4x - 1}{(x-1)^2}}{2\sqrt{\frac{2x^2+1}{x-1}}} = \frac{(2x^2 - 4x - 1)(\sqrt{x-1})}{2\sqrt{2x^2+1}(x-1)^2}$$

(د) لدينا $L(x) = f(\cos x)$ ومنه $L'(x) = f'(\cos x) \cdot (\cos x)' = -\sin x \cdot \frac{2(\cos x)^2 - 4\cos x - 1}{(\cos x-1)^2}$

تطبيق 16

حساب مشتق دالة باستعمال مشتق دالة مركبة

f دالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ بـ $f(x) = \frac{2x+2}{x-2}$

(1) عين الدالة المشتقة f' للدالة f

(2) لتكن g دالة معرفة على المجال $I =]4, +\infty[$ بالعبارة $g(x) = f(\sqrt{x})$.

بين أن g قابلة للاشتقاق على I ثم احسب $g'(x)$ من أجل كل x من I

✓ الحل

(1) الدالة f قابلة للاشتقاق على D_f لأنها دالة ناطقة ولدينا $f'(x) = \frac{-6}{(x-2)^2}$

(2) الدالة f قابلة للاشتقاق على $]2, +\infty[$

و الدالة $u: x \mapsto \sqrt{x}$ قابلة للاشتقاق على $]4, +\infty[$

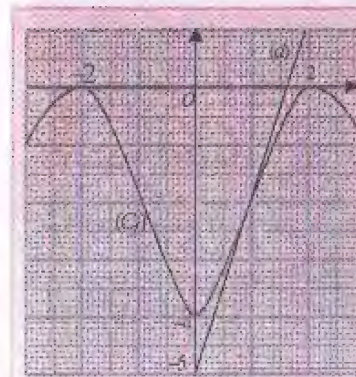
و من أجل كل x من I لدينا $u(x) \in J$

إذن الدالة $g = f \circ u$ قابلة للاشتقاق على I

و من أجل كل x من I لدينا

$$g'(x) = u'(x) \times f'(u(x)) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \frac{-6}{(\sqrt{x}-2)^2} = \frac{-3}{(\sqrt{x})(\sqrt{x}-2)^2}$$

تطبيق 17 حساب العدد المشتق بيانياً



f دالة معرفة على \mathbb{R} .
تمثيلها البياني و المماس عند
النقطتين ذواتا الفاصلتين 1 و 0
كما هو مبين في الشكل المجاور.
لكن g و h ذاتين معرفتين
من أجل كل x من \mathbb{R} .
بـ $h(x) = f(x^2)$ و $g(x) = (f \circ f)(x)$
(1) باستعمال هذا البيان عين
 $f'(1)$ ، $f'(-2)$ ، $f(-2)$ ، $f(1)$.
(2) استنتج $h'(1)$ و $g'(1)$.

✓ الحل

(1) من البيان نجد $f'(1) = -2$ ، $f(-2) = 0$

- لدينا $f'(-2) = 0$ لأن المماس عند النقطة ذات الفاصلة -2 موازي لـ (x, x) .

- ميل المستقيم (d) هو $f'(1)$ حيث $f'(1) = \frac{-2+5}{1-0} = \frac{3}{1} = 3$

(2) - بما أن $g(x) = f(f(x))$ فإن $g'(x) = f'(x) \times f'(f(x))$

إذن $g'(1) = f'(1) \times f'(f(1)) = 3 \times f'(-2) = 0$

- بما أن $h(x) = f(x^2)$ فإن $h'(x) = 2x f'(x^2)$

إذن $h'(1) = 2 \times f'(1) = 2 \times 3 = 6$

تطبيق 18 حساب النهايات باستعمال العدد المشتق

أوجد نهاية الدالة f عند العدد a المعطى في كل حالة من الحالات التالية

(أ) $a=0$ ، $f(x) = \frac{\cos x - 1}{x}$ (ب) $a=0$ ، $f(x) = \frac{\tan x}{x}$

(ج) $a=2$ ، $f(x) = \frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$ (د) $f(x) = \frac{(x+2)^3-1}{x^2-1}$

✓ الحل

إذا كانت نهاية دالة f عند a من الشكل $\frac{0}{0}$ وكانت $f(x) = \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$

حيث g دالة قابلة للاشتقاق عند a فإن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g'(a)$

أ- نضع $g(x) = \cos x$ نجد $g(0) = 1$

و منه نكتب $f(x) = \frac{g(x)-g(0)}{x-0}$ على الشكل

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = g'(0)$$

من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا $g'(x) = -\sin x$ ومنه نجد $g'(0) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = g'(0) = 0$$

ب- نضع $g(x) = \tan x$ نجد $g(0) = 0$ ومنه نكتب بالشكل $f(x) = \frac{g(x)-g(0)}{x-0}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = g'(0)$$

و لدينا $g'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ ومنه نجد $g'(0) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = g'(0) = 1$$

ج- نضع $g(x) = \sqrt{x+7}$ نجد $g(2) = 3$

و منه يمكن كتابة $f(x) = \frac{g(x)-g(2)}{x-2}$ على الشكل

الدالة g قابلة للاشتقاق على $] -7, +\infty[$ فهي قابلة للاشتقاق عند $a=2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} = g'(2) = \frac{1}{2\sqrt{2+7}} = \frac{1}{6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = g'(2) = \frac{1}{6}$$

و منه حسب قاعدة لوبيتال نجد $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2} = \frac{f'(2)}{g'(2)} = \frac{1}{6}$

(ب) نضع $f(x) = x^4 - 1$ و $g(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ عندئذ $f(1) = g(1) = 0$
الدالتان f و g قابلتان للاشتقاق عند $x_0 = 1$

و منه حسب قاعدة لوبيتال نجد $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4-1}{x^3+3x^2-4} = \frac{f'(1)}{g'(1)} = \frac{4}{9}$

(ج) نضع $f(x) = \sin(2x)$ و $g(x) = x - \pi$ منه $f(\pi) = g(\pi) = 0$
الدالتان f و g قابلتان للاشتقاق عند $x_0 = \pi$

و منه حسب قاعدة لوبيتال نجد $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(2x)}{x-\pi} = \frac{f'(\pi)}{g'(\pi)} = 2$

(د) نضع $f(x) = \cos x + \sin x - 1$ و $g(x) = \sin x - \cos x + 1$ عندئذ $f(0) = g(0) = 0$
الدالتان f و g قابلتان للاشتقاق عند $x_0 = 0$

و منه حسب قاعدة لوبيتال نجد $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \sin x - 1}{\sin x - \cos x + 1} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = 1$

تطبيق 19

تطبيق 20

$f(x) = \frac{1}{x+1}$ ب $x \neq -1$ كل

(1) احسب $f^{(1)}(x)$ ، $f^{(2)}(x)$ ، $f^{(3)}(x)$ ، $f^{(4)}(x)$

(2) اكتب عبارة $f^{(n)}(x)$ من أجل كل $n \geq 1$ ثم برهن بالتراجع على هذا التخمين

الحل

(1) $f^{(1)}(x) = f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$ ، $f^{(2)}(x) = f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$

$f^{(3)}(x) = f'''(x) = \frac{-6}{(x+1)^4}$ ، $f^{(4)}(x) = f^{(4)}(x) = \frac{24}{(x+1)^5}$

نلاحظ أن $24 = (-1)^4 \times 4!$ ، $-6 = (-1)^3 \times 3!$ ، $2 = (-1)^2 \times 2!$ ، $-1 = (-1)^1 \times 1!$

لأن عبارة $f^{(n)}(x)$ تكون من الشكل $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \times n!}{(x+1)^{n+1}}$

نسمي p_n الخاصية المراد إثباتها.

من أجل $n=1$ لدينا $f^{(1)}(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} = \frac{(-1)^1 \times 1!}{(x+1)^{1+1}}$

و منه p_1 صحيحة.

(د) بوضع $g(x) = (x+2)^3$ نجد $g(-1) = 1$

ومنه $f(x)$ يكتب على الشكل $f(x) = \frac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)} \times \frac{1}{x-1}$

الدالة g قابلة للاشتقاق عند $a = -1$ ولدينا $g'(-1) = 3$

و $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2}$ وحسب قاعدة جداء النهايات نجد $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$

تطبيق 21

تطبيق 22

(1) بين أنه إذا كانت f و g دالتين قابلتين للاشتقاق عند العدد x_0

وبحيث $f(x_0) = g(x_0) = 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

(2) استعمل هذه القاعدة لحساب :

(أ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$ ، (ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4-1}{x^3+3x^2-4}$

(ج) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(2x)}{x-\pi}$ ، (د) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \sin x - 1}{\sin x - \cos x + 1}$

الحل

(1) f و g قابلتان للاشتقاق عند x_0 هنا معناه أن :

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$ و $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = g'(x_0)$

بما أن $f(x_0) = g(x_0) = 0$ فإنه يمكن كتابة $\frac{f(x)}{g(x)}$ على الشكل :

$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f(x)-0}{g(x)-0} = \frac{f(x)}{g(x)}$ مع $x \neq x_0$

إذن $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

(2) نضع $f(x) = \sqrt{x+7}-3$ و $g(x) = x-2$

ومنه نجد $f(2) = g(2) = 0$

الدالتان f و g قابلتان للاشتقاق عند $x_0 = 2$

$$f(x) = \frac{3-x^2}{3+x^2} \quad (د) \quad f(x) = \frac{x^2+2x+1}{1-x} \quad (ج)$$

$$f(x) = \sqrt{x^2-4} \quad (و) \quad f(x) = \frac{2x}{(x+1)^2} \quad (هـ)$$

$$[0, \pi] \quad f(x) = \cos^2 x - 2 \quad (ن)$$

الحل

الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $f'(x) = 3x^2 + 2x + 5$.

$$f'(x) = 0 \quad \text{يكافئ} \quad 3x^2 + 2x + 5 = 0$$

$$\Delta = 2^2 - 4(3)(5) = -56$$

$\Delta < 0$ منه المعادلة $3x^2 + 2x + 5 = 0$ ليس لها حلول في \mathbb{R} وإشارة $f'(x)$ من إشارة معامل (x^2) إذن من أجل كل x من \mathbb{R} يكون $f'(x) > 0$ وعليه الدالة f متزايدة تماما على \mathbb{R} .

الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على $D_f = \mathbb{R} - \{5\}$ ولدينا $f'(x) = \frac{-11}{(x+5)^2}$

من أجل كل x من D_f لدينا $f'(x) < 0$

ومنه f متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty, 5[$ و $]5, +\infty[$.

الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ ولدينا $f'(x) = \frac{-x^2+2x+3}{(1-x)^2}$

$$f'(x) = 0 \quad \text{يكافئ} \quad (x=3) \quad \text{أو} \quad (x=-1)$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $(-x^2+2x+3)$.

إذا كان x ينتمي إلى $[-1, 3]$ فإن $f'(x) \geq 0$ ومنه f متزايدة تما على $[-1, 3]$.

إذا كان $x \in]-\infty, -1] \cup]3, +\infty[$ فإن $f'(x) \leq 0$

ومنه الدالة f متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty, -1]$ و $]3, +\infty[$.

الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $f'(x) = \frac{-12x}{(3+x^2)^2}$

$$f'(x) = 0 \quad \text{يكافئ} \quad x = 0$$

إذا كان $x \leq 0$ فإن $f'(x) \geq 0$ ومنه f متزايدة تماما على $]-\infty, 0]$.

إذا كان $x \geq 0$ فإن $f'(x) \leq 0$ ومنه f متناقصة تماما على $[0, +\infty[$.

الدالة f قابلة للاشتقاق على $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$ ولدينا $f'(x) = \frac{2(1+x)(1-x)}{(x+1)^3}$

$$f'(x) = 0 \quad \text{يكافئ} \quad x = 1$$

إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $(1+x)(1-x)$.

إذا كان $x \in [-1, 1]$ فإن $f'(x) \geq 0$ ومنه f متزايدة تماما على $[-1, 1]$.

إذا كان $x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ فإن $f'(x) \leq 0$

ومنه f متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty, -1]$ و $[1, +\infty[$.

نفرض أن p_n صحيحة أي $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \times n!}{(x+1)^{n+1}}$

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي $f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^{n+1} (n+1)!}{(x+1)^{n+2}}$

$$f^{(n+1)}(x) = f'(f^{(n)}(x)) = \frac{-(n+1)(-1)^n \times n! (x+1)^n}{(x+1)^{2n+2}}$$

$$= \frac{[(n+1) \times n!] \times (-1)^{n+1} \times (x+1)^n}{(x+1)^{2n+2}} = \frac{(n+1)! \times (-1)^{n+1}}{(x+1)^{n+2}}$$

ومنه p_{n+1} صحيحة إذن p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$.

نقطة الإنعطاف

تطبيق 2

f دالة معرفة على \mathbb{R} بالمعارة $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 2$

(1) احسب $f^{(0)}(x)$ ، $f^{(1)}(x)$ ، $f^{(2)}(x)$ ، $f^{(3)}(x)$ و $f^{(n)}(x)$ مع $n \geq 1$.

(2) عين إشارة $f^{(3)}(x)$ ماذا تستنتج؟

الحل

$$f^{(0)}(x) = f'(x) = x^2 - 4x + 3 \quad (1)$$

$$f^{(2)}(x) = f'(f^{(1)}(x)) = 2x - 4$$

$$f^{(3)}(x) = f'(f^{(2)}(x)) = 2$$

$$f^{(4)}(x) = f'(f^{(3)}(x)) = 0$$

إذن من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 4$ ومن أجل كل عدد حقيقي x فإن $f^{(n)}(x) = 0$

(2) $f^{(2)}(x)$ يتعدم عند $x = 2$ مغيرا إشارته في جوار 2

إذن $(2, f(2))$ هي نقطة انعطاف لـ (C_f) .

إذا العدم $f^{(1)}(x)$ عند x_0 ولا يغير إشارته فإن $(x_0, f(x_0))$ هي نقطة العطف لـ (C_f) .

دراسة اتجاه تغير دالة

تطبيق 2

ادرس اتجاه تغير كل دالة من الدوال التالية:

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-5} \quad (ب) \quad f(x) = x^3 + x^2 + 5x + 2 \quad (ا)$$

(و) الدالة f قابلة للاشتقاق على $D =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$ ولدينا $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$.

$f'(x) = 0$ يكافئ $x = 0$ و $x \in D$.

بما أن $0 \notin D$ فإن المعادلة $f'(x) = 0$ ليس لها حلول في D .

- إذا كان $x > 2$ فإن $f'(x) > 0$ ومنه f متزايدة تماماً على $[2, +\infty[$.

- إذا كان $x < -2$ فإن $f'(x) < 0$ ومنه f متناقصة تماماً على $]-\infty, -2]$.

(ن) الدالة f قابلة للاشتقاق على $[0, \pi]$ ولدينا $f'(x) = -2 \sin x \cos x$.

$f'(x) = 0$ يكافئ $(x = 0 \text{ أو } x = \pi)$ أو $(x = \frac{\pi}{2})$.

- إذا كان $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ فإن $f'(x) \leq 0$ ومنه f متناقضة تماماً على $[0, \frac{\pi}{2}]$.

- إذا كان $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ فإن $f'(x) \geq 0$ ومنه f متزايدة تماماً على $[\frac{\pi}{2}, \pi]$.

تطبيق 23 استعمال إشارة دالة لتعيين اتجاه دالة أخرى

f دالة معرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = -4x^3 + 6x^2 - 6x + 2$.

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة f على \mathbb{R} .

(2) عين عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ على \mathbb{R} ثم اعط حصراتها.

(3) استنتج من الأسئلة السابقة إشارة f .

(4) g دالة معرفة بـ $g(x) = -x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x$.

(أ) باستعمال الأسئلة السابقة عين اتجاه تغير الدالة g على \mathbb{R} .

(ب) استنتج أن من أجل شكل x من \mathbb{R} يكون $g(x) \leq \frac{7}{16}$.

✓ الحل

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -4x^3 = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -4x^3 = +\infty$$

الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $f'(x) = -12x^2 + 12x - 6$.

| x | $-\infty$ | α | $+\infty$ |
|---------------|-----------|----------|-----------|
| إشارة $f'(x)$ | | | |
| تغيرات f | | | |

$$f'(x) = 0 \text{ يكافئ } 2x^2 - 2x + 1 = 0$$

المعادلة $2x^2 - 2x + 1 = 0$ ليس لها

حلولاً في \mathbb{R} لأن مميزها سالب

إذن المشتق لا ينعدم وبالتالي إشارة

$f'(x)$ هي نفس إشارة معامل (x^2)

و عليه $f'(x) < 0$.

الاشتقاقية و دراسة الدوال

(أ) بما أن $f' < 0$ على \mathbb{R} و $v \in \mathbb{R}$ فإن المعادلة $f(x) = 0$ لها حل وحيد α على \mathbb{R} .

حيث $\alpha > 0$ لأن $f(0) > 0$ و $f(1) < 0$ وباستعمال طريقة ديكتومي نجد $\alpha = \frac{1}{2}$.

إذا كان $x < \alpha$ فإن $f(x) > 0$ وإذا كان $x > \alpha$ فإن $f(x) < 0$.

(أ) الدالة g قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $g'(x) = f(x)$.

$g'(x) = 0$ يكافئ $f(x) = 0$ يكافئ $x = \alpha$.

- إذا كان $x < \alpha$ فإن $g'(x) > 0$ و عليه الدالة g متناقضة تماماً على $[\alpha, +\infty[$.

- إذا كان $x > \alpha$ فإن $g'(x) < 0$ و عليه الدالة g متزايدة تماماً على $]-\infty, \alpha]$.

| x | $-\infty$ | α | $+\infty$ |
|---------------|-----------|----------|-----------|
| إشارة $g'(x)$ | | | |
| تغيرات g | | | |

من جدول تغيرات g نستنتج

أنه من أجل كل عدد حقيقي

x فإن $g(x) \leq g(\alpha)$ و بما أن

$$g(\alpha) = \frac{7}{16} \text{ فإن } g(x) \leq \frac{7}{16}$$

تطبيق 24

دراسة دالة ناطقة و رسم تمثيلها البياني

f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-2\}$ بالعلاقة $f(x) = \frac{2x^2 + 3x + 10}{2x + 4}$.

و (C_f) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس.

(1) احسب نهاية f عند $-\infty$ و عند $(+\infty)$.

(ب) بين أن المستقيم ذا المعادلة $y = x + \frac{1}{2}$ مقارب مائل لـ (C_f) .

(2) ادرس نهاية f عند -2 ماذا تستنتج؟

(3) ادرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(4) بين أن $H(-2, \frac{-3}{2})$ مركز شاذ لـ (C_f) ثم ارسم (C_f) و للمستقيمات المقاربة.

✓ الحل

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

(ب) $y = x + \frac{1}{2}$ معادلة مستقيم مقارب لـ (C_f) إذا و فقط إذا كان

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \left(x + \frac{1}{2} \right) \right] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \left(x + \frac{1}{2} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{2x + 4} = 0$$

تطبيق 25

دراسة دالة ناطقة ورسم تمثيلها البياني

- (1) دالة معرفة على \mathbb{R} بالعلاقة $g(x) = x^3 - 3x - 3$.
 (أ) ادرس تغيرات الدالة g على \mathbb{R} .
 (ب) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ لها حل وحيد على \mathbb{R} . نرمز له بـ α . ثم
 - أعط حصراته بتقريب 10^{-2} .
 - عيّن إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} .
 (2) دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ بالعلاقة $f(x) = \frac{2x^3 + 3}{x^2 - 1} + 1$.
 (أ) بين أن إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)$ على المجال $]1, +\infty[$.
 (ب) استنتج اتجاه تغير f على $]1, +\infty[$. ثم شكل جدول تغيرات f على D_f .
 (ج) بين أن $f(\alpha) = 3\alpha + 1$.
 (د) بين أن المستقيم ذا المعادلة $y = 2x + 1$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) .
 ثم ادرس الوضع النسبي لهذا المستقيم بالنسبة إلى (C_f) .
 (هـ) اوجد قواصل النقط من (C_f) التي يكون فيها المماس موازيا للمستقيم المقارب المائل. ثم ارسم (C_f) و المستقيمات المقاربة.

الحل

(1) دراسة تغيرات g

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty.$$

الدالة g قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $g'(x) = 3x^2 - 3$.

$g'(x) = 0$ يكافئ $(x=1)$ أو $(x=-1)$.

- إذا كان $x \in]-1, 1[$ فإن $g'(x) < 0$.

ومن ثم g متناقصة تماما على $[-1, 1]$.

- إذا كان $x \in]1, +\infty[\cup]-\infty, -1[$ فإن $g'(x) > 0$.

ومن ثم g متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty, -1[$ و $]1, +\infty[$.

و إليك جدول تغيرات الدالة g

| x | $-\infty$ | -1 | 1 | $+\infty$ | |
|---------------|-----------|------|-----|-----------|---|
| إشارة $g'(x)$ | + | ○ | - | ○ | + |
| تغيرات g | | ↗ | ↘ | ↗ | |

(ب) بما أن $g'(x) \geq 0$

على المجال $]1, +\infty[$

و $0 \in [g(1), +\infty[$

فإن المعادلة $g(x) = 0$

لها حل وحيد α

ينتمي إلى المجال

إذن $y = x + \frac{1}{2}$ معادلة المستقيم المقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

$$(2) \text{ بما أن } \lim_{x \rightarrow -2} (2x+4) = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -2} (2x+4) = 0^+ \text{ و } \lim_{x \rightarrow -2} (2x^2+5x+10) = 8$$

$$\text{فإن } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = +\infty$$

ومن ثم نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $x = -2$ مقارب عمودي لـ (C_f) .

$$(3) \text{ الدالة } f \text{ قابلة للاشتقاق على } D_f \text{ ولدينا } f'(x) = \frac{2x(x+4)}{2(x+2)^2}$$

إذن إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط

$$f'(x) = 0 \text{ تكافئ } (x=0) \text{ أو } (x=-4).$$

- إذا كان $x \in [-4, -2[\cup]-2, 0]$ فإن $f'(x) \leq 0$ ومن ثم f متناقصة تماما على

كل من المجالين $[-4, -2[$ و $] -2, 0]$.

- إذا كان $x \in]-\infty, -4[\cup]0, +\infty[$ فإن $f'(x) \geq 0$ ومن ثم f متزايدة تماما على

كل من المجالين $]-\infty, -4[$ و $]0, +\infty[$.

و إليك جدول تغيرات الدالة f :

| x | $-\infty$ | -4 | -2 | 0 | $+\infty$ |
|---------------|-----------|------|------|-----|-----------|
| إشارة $f'(x)$ | | ○ | | ○ | |
| تغيرات f | ↗ | ↘ | ↗ | ↘ | ↗ |

$$f(-4) = -5,5 \text{ و } f(0) = 2,5$$

$$(4) \text{ تناظر لـ } H(-2, -1,5) \text{ مركز}$$

إذا و فقط إذا كان

$$f(2(-2)-x) = -f(x) + 2(-1,5)$$

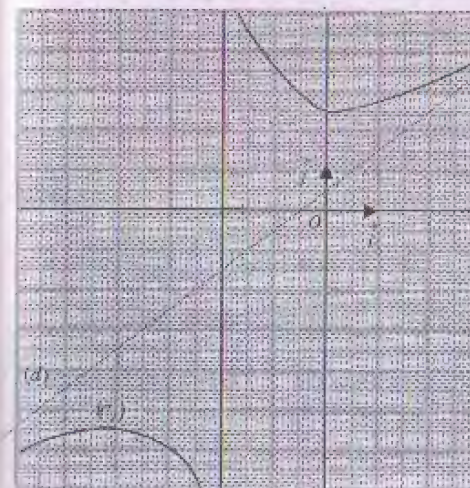
$$f(2(-2)-x) = \frac{2x^2 + 11x + 22}{-2x-4}$$

$$-3 - f(x) = \frac{-2x^2 - 11x - 22}{2x+4}$$

$$\text{ومن ثم نستنتج أن :}$$

$$f(2(-2)-x) = -f(x) + 2(-1,5)$$

$$\text{إذن } H \text{ هي مركز تناظر لـ } (C_f)$$



$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x+1)] = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+3}{x^2-1} \right) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \quad (d)$$

اذن $y = 2x+1$: (d) مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$.
- الوضع النسبي لـ (d) بالنسبة إلى (C_f) .

$$f(x) - (2x+1) = \frac{2x+3}{x^2-1}$$

| x | $-\infty$ | $-\frac{3}{2}$ | -1 | +1 | $+\infty$ |
|-----------------|-----------|----------------|----|----|-----------|
| $2x+3$ | - | ○ | + | + | + |
| x^2-1 | + | + | ○ | - | + |
| $f(x) - (2x+1)$ | - | ○ | + | - | + |

إذا كان x ينتمي إلى أحد المجالين،

$]-\infty, -\frac{3}{2}[$ و $]-1, 1[$

فإن (C_f) يقع تحت (d)

إذا كان

$$x \in]-\frac{3}{2}, -1[\cup]1, +\infty[$$

فإن (C_f) يقع فوق (d)

- (d) يقطع (C_f) في النقطة

$$A\left(-\frac{3}{2}, -2\right)$$

(هـ) ميل المماس لـ (C_f)

عند النقطة ذات الفاصلة x_0

هو $f'(x_0)$.

المماس يوازي (d) هذا معناه ان

$$f'(x_0) = 2$$

$$x_0^2 + 3x_0 + 1 = 0 \text{ يكافئ } f'(x_0) = 2$$

$$x_0^2 + 3x_0 + 1 = 0 \dots (1)$$

$$\Delta = 3^2 - 4(1)(1) = 5$$

المعادلة (1) ذات الجهول

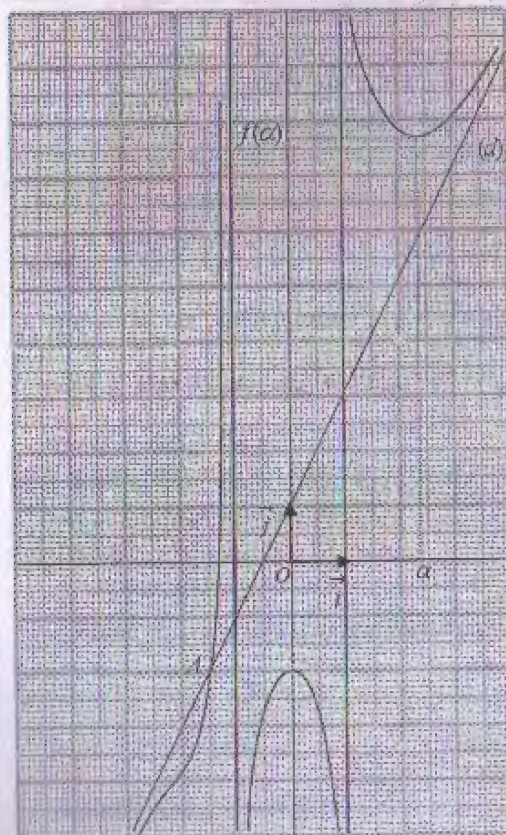
لها حلان هما،

$$x_0 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \text{ و } x_0 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$$

اذن المنحني (C_f) له مماسان

عند النقطتين ذات الفاصلتين،

x_0' و x_0'' يوازيان (d).



$$]1, +\infty[$$

بما ان $g'(x) > 0$ على $]-\infty, -1[$ و $]-1, +\infty[$.

فإن المعادلة $g(x) = 0$ ليس لها حلول في المجال $]-\infty, -1[$.

بنفس الطريقة نبين ان المعادلة $g(x) = 0$ ليس لها حلول في $]-1, 1[$.

اذن المعادلة $g(x) = 0$ لها حل وحيد α في \mathbb{R} .

نلاحظ ان $g(2) = -1$ و $g(3) = 15$ ومنه $\alpha \in]2, 3[$.

باستعمال طريقة البيكوتومي نجد $2,06 < \alpha < 2,12$.

جـ) إذا كان $\alpha \in]-\infty, -1[$ فإن $g(x) < 0$

وإذا كان $\alpha \in]1, +\infty[$ فإن $g(x) > 0$.

$$(2) \text{ الدالة } f \text{ قابلة للاشتقاق على } D_f \text{ ولدينا } f'(x) = \frac{2x}{(x^2-1)^2} \times g(x)$$

إذا كان $x > 1$ فإن $\frac{2x}{(x^2-1)^2} > 0$ وبالتالي إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ على $]1, +\infty[$.

بـ) إذا كان $x \in]1, \alpha[$ فإن $f'(x) < 0$ وبالتالي f متناقصة تماماً على $]1, \alpha[$.

- إذا كان $x \in]\alpha, +\infty[$ فإن $f'(x) > 0$ وبالتالي f متزايدة تماماً على $]\alpha, +\infty[$.

• اتجاه تغير f على $]-1, 1[\cup]1, +\infty[$.

- إذا كان $x \in]-\infty, -1[$ فإن $\frac{2x}{(x^2-1)^2} < 0$ و $g(x) < 0$ وبالتالي $f'(x) > 0$.

اذن f متزايدة تماماً على $]-\infty, -1[$.

- إذا كان $x \in]0, 1[$ فإن $f'(x) < 0$ منه f متناقصة تماماً على $]0, 1[$.

- إذا كان $x \in]-1, 0[$ فإن $f'(x) > 0$ منه f متزايدة تماماً على $]-1, 0[$.

• جدول تغيرات f على D_f :

| x | $-\infty$ | -1 | 0 | 1 | α | $+\infty$ |
|---------------|--------------------|-----------|--------|--------------------|-----------|-----------|
| إشارة $f'(x)$ | + | ○ | + | ○ | - | + |
| تغيرات f | $-\infty \nearrow$ | $+\infty$ | $f(0)$ | $-\infty \searrow$ | $+\infty$ | $+\infty$ |

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

$$\text{جـ) } g(\alpha) = 0 \text{ ولدينا } f(\alpha) = \frac{2\alpha^2+3}{\alpha^2-1} + 1$$

$$3 = \alpha^2 - 3\alpha \text{ يكافئ } g(\alpha) = 0$$

$$f(\alpha) = \frac{2\alpha^2+3}{\alpha^2-1} + 1 = \frac{2\alpha^2+3+\alpha^2-1}{\alpha^2-1} = \frac{3\alpha^2+2}{\alpha^2-1} = 3\alpha + 1$$

تطبيق 25

معجم عائلة المنحنيات

(1) لتكن f_0 دالة معرفة على \mathbb{R} بـ $f_0(x) = \frac{1}{1+x^2}$ و (γ_0) منحنياها البياني في معلم متعامد و متجانس.
 (أ) ادرس تغيرات f_0 على \mathbb{R} ثم شكل جدول تغيراتها.
 (ب) عيون معامل توجيه المماس لـ (γ_0) عند النقطة ذات الفاصلة 1
 (2) من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، نعرف على \mathbb{R} الدالة $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^2}$
 (أ) ادرس تغيرات f_n ثم شكل جدول تغيراتها.
 (ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$ ، $f_n''(x)$ له نفس إشارة x ثم استنتج اتجاه تغير f_n .
 (ج) برهن أن المنحنيين (γ_1) ، (γ_2) ، (γ_3) و f_2 على الترتيب يقبلان مستقيما مقاربا أفقيا يطلب تعيينه.
 (د) برهن أن المستقيم ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل لبيان الدالة f_3 .
 (3) (أ) برهن أن جميع منحنيات الدوال f_n تمر من نقطة ثابتة A .
 (ب) عبر بدلالة n عن معامل توجيه المماس للمنحنيات (γ_n) عند النقطة A .
 (ج) ارسم المنحنيات (γ_0) ، (γ_1) ، (γ_2) ، (γ_3) .

✓ الحل

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_0(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$

الدالة f_0 قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $f_0'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$

$f_0'(x) = 0$ يكافئ $x = 0$.

- إذا كان $x > 0$ فإن $f_0'(x) < 0$ و
 منه f_0 متناقصة تماما على $]0, +\infty[$
 - إذا كان $x < 0$ فإن $f_0'(x) > 0$ منه
 f_0 متزايدة تماما على $]-\infty, 0[$.

(ب) معامل توجيه المماس لـ (γ_0) عند النقطة ذات الفاصلة 1 هو $f_0'(1) = -\frac{1}{2}$.

(2) $D_{f_n} = \mathbb{R}$ ، $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^2}$ (1)

الدالة f_n قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $f_n'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

$f_n'(x) = 0$ يكافئ $(x=1)$ أو $(x=-1)$.

- إذا كان $x \in]-1, 1[$ فإن $f_n'(x) > 0$ منه f_n متزايدة تماما على $[-1, 1]$.

- إذا كان $x \in]1, +\infty[\cup]-\infty, -1[$

فإن $f_n'(x) < 0$ ومنه f_n متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty, -1[$ و $]1, +\infty[$.

| x | $-\infty$ | -1 | 1 | $+\infty$ |
|-----------------|-----------|----------------|---------------|-----------|
| $f_n'(x)$ إشارة | - | 0 | + | - |
| تغيرات f_n | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |

(ب) الدالة f_n قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $f_n'(x) = \frac{x^{n-1}(n-2)x^2+n}{(x^2+1)^2}$

من أجل كل $n \geq 2$ و من أجل كل x من \mathbb{R} يكون $(n-2)x^2 + n \geq 0$

و منه إشارة $f_n'(x)$ هي نفس إشارة x^{n-1} أي نفس إشارة x .

- إذا كان $x > 0$ فإن $f_n'(x) > 0$ و منه f_n متزايدة تماما على $]0, +\infty[$.

- إذا كان $x < 0$ فإن $f_n'(x) < 0$ منه f_n متناقصة تماما على المجال $]-\infty, 0[$.

(ج) بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 0$ فإن (γ_1) له مستقيم مقارب أفقي معادلته $y = 0$ بجوار $(+\infty)$ ، $(-\infty)$

بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = 1$ فإن (γ_2) له مستقيم مقارب أفقي معادلته $y = 1$ بجوار $(+\infty)$ ، $(-\infty)$

(د) $y = x$ مقارب مائل لـ (γ_3) إذا وفقط إذا كان $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f_3(x) - x) = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f_3(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2+1} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x^2+1} = 0$

لذا $y = x$ مستقيم مقارب مائل لـ (γ_3) بجوار $(+\infty)$ و $(-\infty)$.

(3) (أ) نفرض أن (γ_{n_1}) و (γ_{n_2}) يمران من نقطة ثابتة $A(x_0, y_0)$ حيث $n_1 \neq n_2$.

$A \in (\gamma_{n_1})$ هذا معناه أن :

(1) $y_0 = \frac{x_0^{n_1}}{1+x_0^2}$

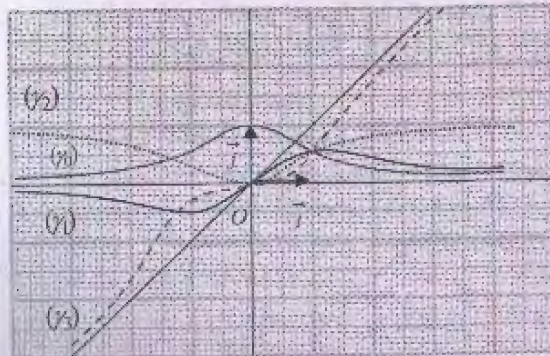
$A \in (\gamma_{n_2})$ هذا معناه أن

(2) $y_0 = \frac{x_0^{n_2}}{1+x_0^2}$

من (1) و (2) نجد :

$\frac{x_0^{n_1}}{1+x_0^2} = \frac{x_0^{n_2}}{1+x_0^2}$

منه نستنتج $x_0^{n_1} = x_0^{n_2}$



| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|--------------|-----------|-----|-----------|
| $f_0'(x)$ | + | 0 | - |
| تغيرات f_0 | 0 | 1 | 0 |

الساويات التالية $h = x\sqrt{(h-1)^2 - 1}$ و $x^2 = \frac{h}{h-2}$ و $h = \frac{2x^2}{x^2-1}$

(ب) بتدوير المثلث ABC حول المستقيم (AB) نحصل على مخروط دوراني رأسه A وإذا علمت أن حجم المخروط الذي ارتفاعه h ومساحة قاعدته S

هو $V = \frac{h \times S}{3}$. عبر عن $V(x)$ حجمه بدلالة x .

(ج) باستعمال النتائج المحصل عليها في السؤال (أ) عين القيمة x التي من أجلها يكون حجم المخروط أصغريا ثم عين من أجل القيمة المحصل عليها الزاوية BAC بتقريب $0,1$ درجة.

الحل

(أ) من أجل كل $x > 1$ لدينا $f(x) = \frac{x^4-1+1}{x^2-1} = \frac{x^4-1}{x^2-1} + \frac{1}{x^2-1}$
 $= \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^2-1} + \frac{1}{x^2-1} = x^2+1 + \frac{1}{x^2-1}$

(ب) $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2-1) = 0^+$ لأن $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^4}{x^2-1} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$

(ج) من أجل كل $x > 1$ لدينا $f(x) - g(x) = \frac{1}{x^2-1}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2-1} = 0$

منه نستنتج أن منحنى مقارب لـ (g) بجوار $(+\infty)$.

إذا كان $x > 1$ فإن $\frac{1}{x^2-1} > 0$

ومنه المنحنى (g) يقع فوق (P) .

(د) الدالة f قابلة للاشتقاق على $]1, +\infty[$ ولدينا $f'(x) = \frac{2x^3(x^2-2)}{(x^2-1)^2}$

$f'(x) = 0$ يكافئ $x = \sqrt{2}$.

إذا كان $x > \sqrt{2}$ فإن $f'(x) > 0$

ومنه f متزايدة تماما على $[\sqrt{2}, +\infty[$

إذا كان $1 < x < \sqrt{2}$ فإن $f'(x) < 0$

ومنه f متناقصة تماما على $]1, \sqrt{2}]$

$f(2) \approx 5,33$; $g(2) = 5$

| x | 1 | $\sqrt{2}$ | $+\infty$ |
|---------|-----------|------------|-----------|
| $f'(x)$ | | - | + |
| $f(x)$ | $+\infty$ | | $+\infty$ |

وبما أن $n_1 \neq n_2$ فإن $x_0 = 1$ وعليه $A(1, \frac{1}{2})$

(ب) معامل توجيه المماس لـ (γ_n) عند A هو $f'_n(1)$

$f'_n(1) = \frac{1[(n-2)+n]}{(1+1)^2} = \frac{2n-2}{4} = \frac{n-1}{2}$

| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|-----------------|-----------|-----------|-----------|
| إشارة $f'_2(x)$ | + | 0 | + |
| تغيرات f_2 | | $-\infty$ | $+\infty$ |

| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|-----------------|-----------|------|-----------|
| إشارة $f'_2(x)$ | - | 0 | + |
| تغيرات f_2 | | -1 | 1 |

تطبيق 4 المنحنى المقارب - حجم مخروط دوراني

(أ) f دالة معرفة على المجال $]1, +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{x^4}{x^2-1}$. نسمي (γ)

تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) (طول الوحدة 4cm).

(أ) تحقق أنه من أجل كل x من $]1, +\infty[$ يكون $f(x) = x^2 + 1 + \frac{1}{x^2-1}$

(ب) ادرس نهاية f عند 1 وعند $(+\infty)$.

(ج) (P) المنحنى الممثل للدالة g المعرفة على $]1, +\infty[$ بـ $g(x) = x^2 + 1$

- ما هي نهاية $[f(x) - g(x)]$ كما x يتوغل إلى $(+\infty)$ ؟

- ادرس الوضع النسبي لـ (γ) بالنسبة إلى (P)

(د) ادرس تغيرات الدالة f ثم ارسم (P) و (γ) في نفس المعلم السابق.

(2) في الشكل المجاور:

- المثلث ABC قائم في B .

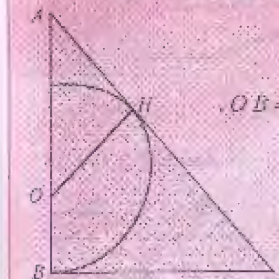
- نصف الدائرة ذات المركز O ونصف القطر $OB = 1$.

- المستقيم (BC) مماس لنصف الدائرة في B .

- المستقيم (AC) مماس لنصف الدائرة في H .

نضع $BC = x$ و $AB = h$

(أ) بين أن $\frac{OH}{AH} = \frac{BC}{AB}$ ثم استنتج



(2) في المثلث القائم ABC لدينا

$$\tan \hat{A} = \frac{BC}{AB} \dots (1)$$

وفي المثلث القائم AQH لدينا

$$\tan \hat{A} = \frac{QH}{AH} \dots (2)$$

من (1) و (2) نجد $\frac{QH}{AH} = \frac{BC}{AB} \dots (3)$

• استنتاج المساواة

بما أن H نقطة من نصف الدائرة

$$OH = 1$$

ومنه المساواة (3) تصبح $\frac{1}{AH} = \frac{x}{h}$

$$h = AH \times x$$

في المثلث OAH لدينا

$$OA^2 = OH^2 + AH^2$$

$$AH = \sqrt{OA^2 - OH^2} \text{ ومنه}$$

$$OA = AB - OB = h - 1 \text{ لكن}$$

$$h = \sqrt{(h-1)^2 - 1} \times x \text{ بالتالي } AH = \sqrt{(h-1)^2 - 1}$$

بترتيب المساواة $h = \sqrt{(h-1)^2 - 1} \times x$ نجد $h^2 = [(h-1)^2 - 1] \times x^2$ ومنه

$$x^2 = \frac{h^2}{h^2 - 2h} = \frac{h}{h-2} \text{ أي } x^2 = \frac{h^2}{(h-1)^2 - 1}$$

من المساواة $x^2 = \frac{h}{h-2}$ نجد $h(x^2 - 1) = 2x^2$ بالقسمة على $x^2 - 1$ نجد $h = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$

$$S = \pi \times BC^2 = \pi x^2 \text{ و } V(x) = \frac{h \times S}{3}$$

$$V(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1} \times \frac{\pi x^2}{3} = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{x^4}{x^2 - 1} \right) \text{ إذن}$$

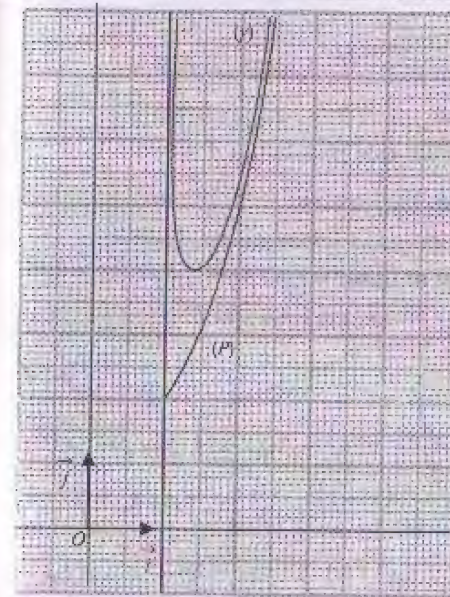
$$V(x) = 2f(x) \text{ أي } V(x) = \frac{2\pi}{3} f(x)$$

بما أن $h > 0$ فإن f و V لهما نفس اتجاه تغير و بما أن f لها قيمة صغرى عند $x = \sqrt{2}$

فإن V لها قيمة صغرى عند $\sqrt{2}$ وفي هذه الحالة $V = \frac{2\pi}{3} f(\sqrt{2}) = \frac{8\pi}{3}$

$$\tan(\hat{BAC}) = \frac{BC}{AB} = \frac{x}{h} = \frac{x^2 - 1}{2x} = \frac{(\sqrt{2})^2 - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

ومنه $\hat{BAC} \approx 19.52^\circ$



المسألة 23

المسألة 23 المسافة الأعظمية و دوال كثيرة الحدود

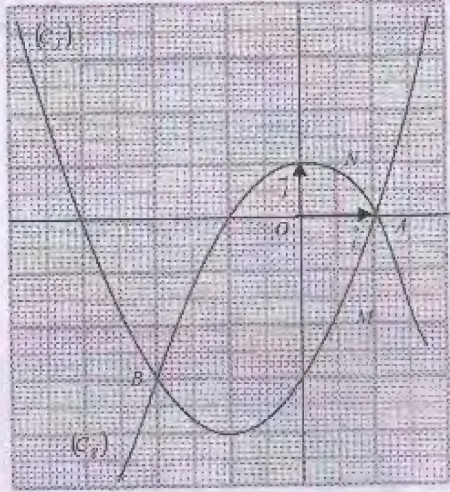
f و g دالتان معرفتان على \mathbb{R} بـ $f(x) = x^2 + 2x - 3$ و $g(x) = 1 - x^2$

(C_f) و (C_g) التحيان المثلان لـ f و g في معلم متعامد و متجانس.

(أ) ارسم (C_f) و (C_g) في نفس المعلم.

(ب) M و N نقطتان من (C_g) و (C_f) على الترتيب فاصلتيهما l

مع $l \in [-2, 1]$ من أجل أي قيمة لـ l تكون MN أعظمية ؟ ثم احسبها.



التحيان (C_f) و (C_g)

عبارة عن قطعين مكافئين

(C_f) و (C_g)

يتقاطعان في النقطتين

$$A(1, 0) \text{ و } B(-2, -3)$$

$$N(t, g(t)), M(t, f(t))$$

$$MN = \sqrt{(t-t)^2 + (f(t) - g(t))^2}$$

$$= |f(t) - g(t)| = g(t) - f(t)$$

$$= -3t^2 - 2t + 4$$

$$h(t) = -3t^2 - 2t + 4$$

ضع h قابلة للاشتقاق

على $[-2, 1]$ ولدينا $h'(t) = -6t - 2$

لنساافة MN تكون أعظمية لـ

$x = -\frac{1}{3}$ وفي هذه الحالة

$$MN = h\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{11}{3}$$

| | | | |
|---------|----|------------------------------|---|
| t | -2 | $-\frac{1}{3}$ | 1 |
| $h'(t)$ | + | 0 | - |
| $h(t)$ | | $h\left(-\frac{1}{3}\right)$ | |

المسألة 24 المسافة الأعظمية و الدوال الجذرية

المسألة 24

لتكن f دالة معرفة بـ $f(x) = x \sqrt{\frac{p^2}{4} - x^2}$ حيث p حقيقي موجب تماماً.

(أ) تحقق أن f معرفة على $\left[-\frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{2}\right]$

(ب) ادرس اتجاه تغير f ثم بين أن f لها قيمة عظمية من أجل $x = \frac{\rho}{2\sqrt{2}}$
 (2) نهتم الآن بكل العينات التي محيطها ρ وطول أحد قطريها x .
 (أ) عر عن مساحة هذه العينات بدلالة x و ρ .
 (ب) باستعمال السؤال الأول، عين من بين العينات تلك التي لها مساحة اعظمية وما طبيعة هذا العين؟

✓ الحل

(أ) f معرفة إذا وفقط إذا كان $\frac{\rho^2}{4} - x^2 \geq 0$

$\frac{\rho^2}{4} - x^2 \geq 0$ إذا وفقط إذا كان $x \in \left[-\frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{2}\right]$ ومنه $D_f = \left[-\frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{2}\right]$

(ب) الدالة f قابلة للاشتقاق على $\left]-\frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{2}\right[$ ولدينا $f'(x) = \frac{-2\left(x^2 - \frac{\rho^2}{8}\right)}{\sqrt{\frac{\rho^2}{4} - x^2}}$

$f'(x) = 0$ يكافئ $\left(x = \frac{\rho}{2\sqrt{2}}\right)$ أو $\left(x = -\frac{\rho}{2\sqrt{2}}\right)$

إشارة $f'(x)$ عكس إشارة $\left(x^2 - \frac{\rho^2}{8}\right)$

| x | $-\frac{\rho}{2}$ | $-\frac{\rho}{2\sqrt{2}}$ | $\frac{\rho}{2\sqrt{2}}$ | $\frac{\rho}{2}$ |
|---------|-------------------|---|--|------------------|
| $f'(x)$ | - | 0 | + | 0 |
| $f(x)$ | 0 | $f\left(-\frac{\rho}{2\sqrt{2}}\right)$ | $f\left(\frac{\rho}{2\sqrt{2}}\right)$ | 0 |

$f(-\rho) = 0$

$f\left(\frac{\rho}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{\rho^2}{8}$ و

إن من أجل كل x

من $\left[-\frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{2}\right]$ يكون

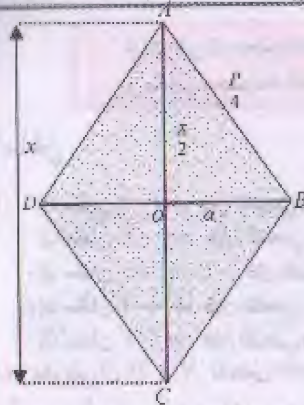
$f(x) \leq f\left(\frac{\rho}{2\sqrt{2}}\right)$

ومنه f لها قيمة اعظمية من أجل $x = \frac{\rho}{2\sqrt{2}}$

(أ) نسمي A مساحة العين المفروض $A(x) = S_T \times 4$

حيث S_T مساحة المثلث OAB

$S_T = \frac{\alpha}{2} \times \frac{x}{2} = \frac{\alpha x}{4}$ ومنه $A = \alpha x$



$$\alpha^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \left(\frac{\rho}{4}\right)^2$$

$$\text{ومنه } \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho^2}{4} - x^2} \text{ أي } \alpha = \sqrt{\frac{\rho^2}{16} - \frac{x^2}{4}}$$

$$\text{إذن } A(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho^2}{4} - x^2} = \frac{1}{2} f(x)$$

(ب) بما أن f و $\frac{1}{2}f$ لهما نفس اتجاه تغير فإن $\frac{1}{2}f$

أي A لها قيمة اعظمية عند $x = \frac{\rho}{2\sqrt{2}}$

إذن يوجد معين واحد من بين العينات له مساحة

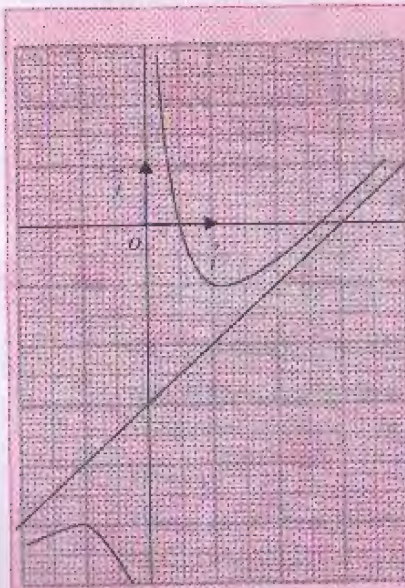
اعظمية هي $A\left(\frac{\rho}{2\sqrt{2}}\right)$ و محيطه ρ .

في هذه الحالة (أي لـ $x = \frac{\rho}{2\sqrt{2}}$) قيمة α هي $\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho^2}{4} - \frac{\rho^2}{8}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho}{2\sqrt{2}} = \frac{\rho}{4\sqrt{2}}$

بما أن $OA = OB$ فإن $ABCD$ مربع.

تطبيق 30

دراسة الدوال والحل الهندسي



النحني ذو المعادلة $y = x - 3 + \frac{1}{x}$

ممثل في الشكل المجاور.

d مستقيم معادلته $y = m$

حيث m عدد حقيقي معطى.

(1) باستعمال النحني عين حسب

قيم m عدد نقاط تقاطع النحني

مع المستقيم d .

(2) لتكن M و N نقطتين

تقاطع النحني مع المستقيم

d في حالة وجودهما.

تحقق أن فاصلتهما x_N و x_M

هما حلول للمعادلة

$$x^2 - (m+3)x + 1 = 0$$

(3) منتصف $[MN]$ تحقق

أن $\left(\frac{m+3}{2}, m\right)$ إحداثيتنا I

من $\left[\frac{4}{\sqrt{5}}, 2 \right]$ يكون $f'(x) < 0$
- إليك جدول تغيرات f

| x | 0 | $\frac{4}{\sqrt{5}}$ | 2 | $+\infty$ |
|---------------|---|----------------------|---|-----------|
| إشارة $f'(x)$ | + | 0 | - | + |
| تغيرات f | | $2\sqrt{5}$ | | $+\infty$ |

$$f\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right) = 2\sqrt{5} \approx 4,47$$

(4) بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x) = 0$

فإن $y = 3x$ معادلة مستقيم مقارب مائل لـ (y) بجوار $(+\infty)$.

(5) الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[2, +\infty[$ فهي تقابل و بالتالي تقبل دالة

عكسية f^{-1} من $[4, +\infty[$ في $[2, +\infty[$

$$f^{-1}: [4, +\infty[\rightarrow [2, +\infty[$$

$$y \mapsto x = f^{-1}(y)$$

إيجاد عبارة $f^{-1}(x)$

من أجل كل $y \geq 4$ لدينا $y = 2x + \sqrt{x^2 - 4}$ و منه $3x^2 - 4xy + y^2 + 4 = 0$

$$x_2 = \frac{2y - \sqrt{y^2 - 12}}{3}, \quad x_1 = \frac{2y + \sqrt{y^2 - 12}}{3}$$

و بعد حل هذه المعادلة نجد x_2 مرفوض لأنه لا ينتمي إلى $[2, +\infty[$.

$$f^{-1}(y) = \frac{2y + \sqrt{y^2 - 12}}{3} \quad \text{إذن}$$

تقارن و مسائل

باستعمال الدوال المشتقة للدوال المرجعية التالية عين معامل توجيه المماس لمنحنيات هذه الدوال عند النقطة ذات الفاصلة a المعطاة.

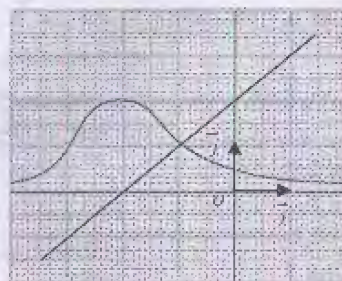
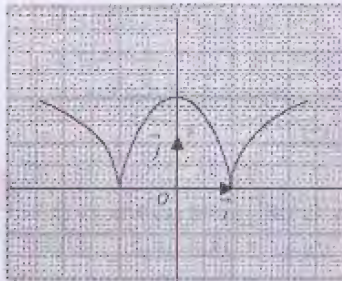
(أ) $f(x) = x^2$ ، $a = -3$ ، (ب) $g(x) = \frac{1}{x}$ ، $a = 1$ ، (ج) $K(x) = \sqrt{x}$ ، $a = 4$

من أجل كل دالة من الدوال التالية ما هي الدالة القابلة للاشتقاق عند العدد المعطى؟

(أ) $f(x) = x\sqrt{x}$ ، $a = 0$ ، (ب) $f(x) = \sqrt{x-3}$ ، $a = 3$

(ج) $f(x) = |x+3|x$ ، $a = -3$ ، (د) $f(x) = \frac{|x|+1}{|x|-2}$ ، $a = 0$

إليك التمثيلان البيانيان للدالتين f و g . بقراءة بيانية هل الدالتان قابلتان للاشتقاق عند النقطة 1؟ وفي حالة نعم عين العدد المشتق لكل من الدالتين f و g عند -1.

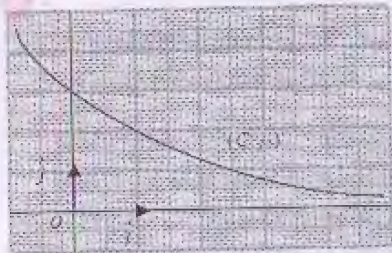


في كل حالة من الحالات التالية عين الدالة المشتقة للدالة f :

(أ) $f(x) = \frac{x^2-2}{x^2+3}$ ، (ب) $f(x) = (2x-1)^3$ ، (ج) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

(د) $f(x) = 3x - \frac{1}{2x+1}$ ، (هـ) $f(x) = \frac{3x+2}{x^2+4x+5}$ ، (و) $f(x) = x^3\sqrt{x}$

الاشتقاقية ودراسة الدوال



9 f دالة معرفة على $[-1, 3]$ بحيث $f(0)=1$ و التمثيل البياني للدالة المشتقة (كما في الشكل) باستعمال خطوة قدرها 0,1 عين القيمة المقربة لـ $f(1,1)$.

10 f دالة قابلة للاشتقاق على $[-2, 2]$ و بحيث $f(0)=1$ و $f'(x)=\sqrt{9-x^2}$.
(1) باستعمال طريقة أولر بخطوة قدرها 0,5 عين قيمة مقربة لـ $f(2)$
(2) ارسم المنحنى البياني المقرب للدالة f على المجال $[0, 2]$ ثم على المجال $[-2, 0]$

11 f دالة معرفة على \mathbb{R} بـ $f(x)=x+\sqrt{1+x^2}$.
(1) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون $\sqrt{1+x^2} \times f'(x) = f(x)$
(2) استنتج أنه من أجل كل حقيقي x يكون $(1+x^2)f''(x) + x f'(x) - f(x) = 0$

12 (1) عين الدالة المشتقة للدالة f المعرفة من أجل كل $x \neq 2$ بـ $f(x) = \frac{x^2+3}{x-2}$
(2) استنتج الدالة المشتقة لكل دالة من الدوال التالية :

$$h: x \mapsto \frac{x^4+3}{x^2-2} \quad ; \quad g: x \mapsto \frac{x+3}{\sqrt{x-2}}$$

$$L: x \mapsto \frac{\sin^2 x + 3}{\sin x - 2} \quad ; \quad K: x \mapsto \sqrt{\frac{x^2+3}{x-2}}$$

13 في كل حالة من الحالات التالية عين المجال الذي تكون فيه f قابلة للاشتقاق ثم احسب $f'(x)$

(1) $f(x) = \sin^3(2x)$ بـ $f(x) = \cos^3(3x)$

(ج) $f(x) = \frac{1}{\sin 2x}$ د $f(x) = \frac{1}{4\cos^2 x - 1}$

(ن) $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x+3}$ (ي) $f(x) = 2x(x^2+1)^3$

5 عين الدالة المشتقة لكل دالة من الدوال التالية على المجال I المخطى :

(ا) $I = \mathbb{R}$ ، $f(x) = x \sin x$ ب $I = \mathbb{R}$ ، $f(x) = \cos x \sin x$

(ج) $I = [0, \frac{\pi}{2}]$ ، $f(x) = \tan x$ د $I = [0, 2\pi]$ ، $f(x) = \frac{2+\cos x}{2+\sin x}$

(هـ) $I = [0, 2\pi]$ ، $f(x) = x + \sin x$

6 (γ) المنحنى البياني للدالة f المعرفة من أجل كل $x \neq -1$ بـ $f(x) = \frac{x^2-3x+1}{x+1}$

(1) أعط معادلة المماس للمنحنى (γ) عند النقطة ذات الفاصلة $x=2$.

(2) هل يوجد مماس لـ (γ) يوازي للمستقيم ذا المعادلة $y=2x$ ؟

(3) هل يوجد مماس لـ (γ) يوازي للمستقيم ذا المعادلة $y=\frac{2}{3}x$ ؟

7 f و g دالتان معرفتان على $[0, +\infty[$ بـ $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = x^2$

(أ) برهن أن معامل توجيه المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 هو نفس معامل

توجيه المماس لـ (C_g) عند النقطة ذات الفاصلة 0,25.

(ب) ماذا يمكن استنتاجه فيما يخص هذين المماسين ؟

8 (1) f دالة معرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = x^3 - 3x + 5$

(أ) ادرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(ب) تحقق أن للمعادلة $f(x)=0$ حلا وحيدا محضورا بين -3 و -2 ثم أعط قيمة

مقربة له بتقريب 10^{-1}

(2) g دالة معرفة على \mathbb{R} بـ $g(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4$

(أ) ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

(ب) عين عدد حلول المعادلة $g(x)=0$ ثم من أجل كل حل عين حضرا له بسعة

10^{-1} (طول مجال الحضير هو 10^{-1})

14

14 دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ بـ $f(x) = \frac{3x+5}{x-2}$

(1) عين الدالة المشتقة f' للدالة f .

(2) نرسم g بـ g إلى الدالة المعرفة على $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ بـ $g(x) = f(\cos(x))$

بين أن g قابلة للاشتقاق على I ثم احسب $g'(x)$ من أجل كل x من I .

(3) نرسم h إلى الدالة المعرفة على المجال $J =]4, +\infty[$ بـ $h(x) = f(\sqrt{x})$ بين أن h قابلة للاشتقاق على J ثم احسب $h'(x)$ من أجل كل x من J .

15

15 إذا كانت f دالة فردية و قابلة للاشتقاق على I ماذا يمكن القول عن شعبة f' .

إذا كانت f دالة زوجية و قابلة للاشتقاق على J ماذا يمكن القول عن شعبة f' .

16

16 باستعمال العدد للشتق أوجد نهاية f عند العدد a في كل حالة من الحالات التالية:

(أ) $a = -1$ ، $f(x) = \frac{(x+3)^2 - 1}{x+2}$ (ب) $a = -1$ ، $f(x) = \frac{\sqrt{x+2} - 1}{x+1}$

(ج) $a = 0$ ، $f(x) = \frac{\cos x - 1}{x}$ (د) $a = 0$ ، $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+4} - 2}{x}$

(هـ) $a = 0$ ، $f(x) = \frac{\sin^2 x}{x}$ (و) $a = 1$ ، $f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x-1}$

(ز) $a = \pi$ ، $f(x) = \frac{\sin(2x)}{x-\pi}$ (ي) $a = 0$ ، $f(x) = \frac{\tan(x)}{x}$

(ث) $a = \frac{\pi}{2}$ ، $f(x) = \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$ (ح) $a = 1$ ، $f(x) = \frac{x + \sqrt{x-2}}{x-1}$

17

17 a ، b عدنان حقيقيان، f الدالة المعرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = \frac{3x^3 + ax + b}{x^2 + 1}$

(1) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس. هل يوجد a و b بحيث المماس

لـ (γ) عند النقطة ذات الفاصلة (1) معادلته $y = 4x + 3$ ؟

(2) a عدد حقيقي، g الدالة المعرفة على \mathbb{R} بـ $g(x) = ax^3 + 3x^2 + 3x$

هل يوجد a بحيث الدالة g لها نهاية حدية عظمى من أجل $x = 1$ ؟

11 a ، b عدنان حقيقيان، f الدالة المعرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = ax^3 + bx^2 + 2$ و (γ) تمثيلها البياني. هل يوجد a و b بحيث المماس لـ (γ) عند $A(1, 2)$ يوازي محور الفواصل ؟

12 f دالة معرفة على المجال $I =]1, +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$

(1) ادرس تغيرات f على I .

(2) استنتج أن المعادلة $f(x) = 0$ لها حل وحيد α من المجال $]1, 2[$

(3) أعط قيمة مقربة لـ α بتقريب 10^{-2} بالزيادة.

13 f دالة معرفة من أجل كل عدد حقيقي x بـ $f(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 + x + 3}$

(1) ادرس تغيرات f ثم ارسم تمثيلها البياني (γ) في معلم متعامد و متجانس.

(2) a عدد حقيقي، أكتب معادلة المماس لـ (γ) عند النقطة $A(a, f(a))$

(ب) هل توجد مماسات لـ (γ) تمر من البدا O ؟

14 f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ $f(x) = \frac{2x^2 + x + 7}{x+1}$ و (γ) منحناها البياني في

معلم متعامد و متجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) حيث (لوحة هي 2cm).

(1) احسب نهاية f عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$

(ب) بين أن (d) المستقيم ذا المعادلة $y = 2x - 1$ مقارب مائل لـ (γ)

(2) احسب نهاية f عند -1 ماذا تستنتج بالنسبة إلى (γ) ؟

(3) ادرس تغيرات f مشكلا جدول تغيراتها.

(4) بين أن النقطة $I(-1, -3)$ مركز تناظر لـ (γ) .

(5) ارسم التقييمات القارية ثم (γ) .

15 f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 10x - 11}{(x-1)^2}$ و (γ) منحناها

البياني في معلم متعامد و متجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) .

(1) احسب نهاية f عند أطراف مجال التعريف ثم ادرس اتجاه تغير f و شكل جدول تغيراتها.

(2) برهن أن المستقيم (d) ذا المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل لـ (γ) ثم ادرس الوضع النسبي لـ (γ) بالنسبة إلى (d) ، ثم ارسم المستقيمات المقاربة و (γ) .

(3) عين بيانيا عند حلول المعادلة ذات الجهد x التالية

$$x^3 - (m+3)x^2 + (2m+10)x - 11 - m = 0$$

f دالة معرفة على $]0, +\infty[\cup]-4, -\infty[$ بـ $f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x}$ و (γ) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس.

(1) احسب نهاية f عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$.

(2) بين أن المستقيم (d) ذا المعادلة $y = 2x + 3$ مقارب مائل لـ (γ) بجوار $(+\infty)$.

(3) هل f قابلة للاشتقاق عند -4 ؟ عند 0 ؟

(4) احسب $f'(x)$ من أجل كل x من $]0, +\infty[\cup]-4, -\infty[$ و شكل جدول تغيرات الدالة f ، ثم ارسم للمستقيمات المقاربة و (γ) .

f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-2\}$ بـ $f(x) = \frac{x^3 - 3x - 6}{2x + 4}$ و (γ) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس.

(1) برهن أنه يوجد عدنان حقيقيان a و b بحيث من أجل كل $x \neq -2$ يكون:

$$f(x) = a(x-1)^2 + \frac{b}{x+2}$$

(2) ادرس تغيرات الدالة f .

(3) نسمي (Γ) المنحني ذا المعادلة $y = \frac{1}{2}(x-1)^2$ و $x \neq -2$

P نقطة من (Γ) فاصلتها x و M نقطة من (γ) لها نفس الفاصلة.

أوجد المركبات السلبية للشعاع PM ، ثم استنتج أن x يؤول إلى $(+\infty)$ أو إلى

$(-\infty)$ المسافة PM تؤول إلى الصفر، فسر هذه النتيجة هندسيا ثم ارسم (Γ) و (γ) .

(1) لتكن g دالة معرفة على \mathbb{R} بـ $g(x) = -2x^3 - 6x^2 - 1$

ادرس تغيرات g ثم عين إشارة $g(x)$ على المجال $]-2, +\infty[$

(2) لتكن f دالة معرفة على $]-2, +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{1-x^3}{x+2}$

(1) بين أن $f'(x)$ و $g(x)$ لهما نفس الإشارة على $]-2, +\infty[$

(ب) عين اتجاه تغير f على $]-2, +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

(ج) ارسم (γ) التمثيل البياني لـ f في معلم متعامد و متجانس.

(1) g دالة معرفة على \mathbb{R} بـ $g(x) = x^3 - 3x - 4$

(1) ادرس تغيرات g ثم شكل جدول تغيراتها.

(ب) بين أن للمعادلة $g(x) = 0$ حلا وحيدا α على \mathbb{R} ثم اعط قيمة مقربة له

بتقريب 10^{-2} بالزيادة. واستنتج إشارة $g(x)$

(2) f دالة معرفة على المجال $]1, +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$

(1) بين أن $f'(x)$ له نفس إشارة $g(x)$ على المجال $]1, +\infty[$

(ب) ادرس تغيرات f ثم شكل جدول تغيراتها ثم اعط قيمة مقربة لـ $f(\alpha)$.

(ج) بين أن المستقيم (d) ذا المعادلة $y = x + 2$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $(+\infty)$.

ثم استنتج الوضع النسبي لـ (C_f) بالنسبة إلى (d) .

(د) ارسم المستقيمات المقاربة و (C_f) .

(1) g دالة معرفة كما يلي $g(0) = 0$ و من أجل كل $x \neq 0$: $g(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

(1) بين أن g قابلة للاشتقاق عند 0 .

(ب) (γ) المنحنى البياني لـ g في معلم متعامد و متجانس.

تحقق أن محور الفواصل مماس لـ (γ) عند النقطة O .

(2) (1) برهن أن $g\left(\frac{1}{k\pi}\right) = 0$ من أجل كل عدد صحيح k .

(ب) α عدد حقيقي موجب تماما، و صغير بالقدر الكافي.

يوجد عدد غير منته من الأعداد $\frac{1}{k\pi}$ مع k عدد طبيعي من المجال $]0, \alpha[$ لذا ؟

(3) هل صحيح أن المماس لـ (γ) عند A لا يقطع (γ) في نقطة أخرى مختلفة عن A بجوار A ؟

f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ بـ $f(x) = |x+1| + \frac{x}{x^2-1}$ و (γ) منحناها

البياني في معلم متعامد و متجانس.

(1) اكتب $f(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة.

(ب) ادرس قابلية اشتقاق f عند -1

(ج) ادرس تغيرات f ثم شكل جدول تغيراتها.

- (2) بين أن (d_1) و (d_2) حيث $y = -x - 1$ و (d_1) و (d_2) مقاربان لـ (γ) .
 (ب) ادرس الوضع النسبي لـ (γ) بالنسبة إلى كل من (d_1) و (d_2) .
 (ج) أوجد معادلة المماس لـ (γ) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 0$ ثم ادرس الوضع النسبي لـ (γ) بالنسبة إلى هذا المماس على المجال $[-1, 1]$.
 (د) ارسم المستقيمات المقاربة والمماس و (γ) .

- 1) اعط مجموعة تعريف f .
 (ب) ادرس قابلية اشتقاق f عند $x_0 = -1$ من اليسار ماذا تستنتج؟
 (ج) ادرس استمرار وقابلية اشتقاق f عند $x_0 = 0$.
 (2) بين أن لـ (γ) مستقيمين مقاربين مائلين بجوار $(+\infty)$ و $(-\infty)$ يطلب تعيينهما.
 (3) ادرس تغيرات f ثم ارسم (γ) والمستقيمات المقاربة.

لتكن f_α دالة معرفة بـ $f_\alpha(x) = \frac{x^2 + x + 3\alpha + 1}{x + \alpha}$ مع α عدد حقيقي، (γ_α)

- منحنائها البياني في معلم متعامد ومتجانس.
 (1) ادرس حسب قيم α تغيرات الدالة f_α .
 (2) بين أن المستقيم (d_α) ذا المعادلة $y = x + 1 - \alpha$ مقارب مائل لـ (γ) بجوار $(-\infty)$ و $(+\infty)$ ثم ادرس الوضع النسبي لـ (γ_α) بالنسبة إلى (d_α) .
 (3) اثبت أن جميع المنحنيات (γ_α) تمر من نقطة ثابتة يطلب تعيينها.
 (4) نضع $\alpha = 2$ ارسم (γ_2) .
 (5) بين أن النقطة $I(-2, -3)$ مركز تناظر لـ (γ_2) .
 (6) ناقش حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $x^2 + (1-m)x + 7 - 2m = 0$.
 (7) استنتج من السؤال (6) عدد حلول المعادلة ذات المجهول θ ،
 $\sin^2 \theta + (1-m) \sin \theta + 7 - 2m = 0$
 (8) لتكن الدالة العددية g المعرفة بـ $g(x) = \frac{x^2 - |x| + 7}{|x| - 2}$.

عين مجموعة تعريف g ثم بين أن g زوجية. واستنتج رسم (γ) بيان g .

f_1 و f_2 دالتان معرفتان بـ $f_1(x) = 2x + \sqrt{4x^2 - 4}$ و $f_2(x) = 2x - \sqrt{4x^2 - 4}$

و (γ_1) و (γ_2) منحناهما البيانيان في معلم متعامد ومتجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) على الترتيب.

- (1) ادرس استمرار وقابلية اشتقاق f_1 على D_{f_1}
 (2) احسب $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f_1(x) - f_1(-1)}{x + 1}$ و $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f_1(x) - f_1(1)}{x - 1}$ ماذا تستنتج؟
 (3) ادرس تغيرات الدالة f_1 .

(4) بين أن لـ (γ_1) مستقيما مقاربا مائلا (d_1) معادلته $y = 4x$ بجوار $(-\infty)$ ثم ارسم (d_1) و (γ_1) .

(5) بين أن f_1 تقابل من $[1, +\infty[$ في $[2, +\infty[$ ثم عين عبارة $f_1^{-1}(x)$ وارسم (γ_1) بيانه في نفس المعلم السابق دون دراسة تغيراتها.

(6) أ) ليكن S_O التناظر المركزي الذي مركزه النقطة O عين عبارة S_O
 (ب) اثبت أن $(\gamma_1) = (\gamma_2)$ ثم ارسم (γ_2) .

(7) لتكن (Γ) مجموعة النقط $M(x, y)$ من المستوى التي إحداثياتها تحقق المعادلة $y^2 - 4xy + 4 = 0$.

أ) بين أن $(\Gamma) = (\gamma_2)$ لـ (γ_2) .

ب) ليكن الشعاع $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j}$ ، اكتب معادلة (Γ) في العلم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

لتكن f دالة معرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = 2x - \sin x$ و (γ) منحنائها البياني في معلم

متعامد ومتجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) ، (وحدة الطول هي 3cm).

- (1) احسب $f'(x)$ ثم استنتج تغيرات f على \mathbb{R} .
 (2) برهن أنه من أجل كل x من \mathbb{R} يكون $2x - 1 \leq f(x) \leq 2x + 1$ ثم استنتج نهاية f عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$.
 (3) نرمز بـ (d_1) و (d_2) إلى المستقيمين اللذين معادلتيهما على التوالي $y = 2x - 1$ و $y = 2x + 1$ عين نقط تقاطع (γ) مع (d_1) و (d_2) ثم حدد المماسات لـ (γ) عند هذه النقط.
 (4) ادرس شفعية f ماذا يمكن استنتاجه بالنسبة إلى (γ) .
 (5) قارن بين $f(x + 2\pi)$ و $f(x)$ ماذا يمكن استنتاجه بالنسبة إلى (γ) .
 (6) ارسم بدقة المنحنى (γ) على المجال $[0, \pi]$ ثم ارسم المماسات عند النقطتين ذواتي الفاصلتين 0 و π ثم (d_1) و (d_2) واستنتج رسم (γ) على المجال $[-3\pi, 3\pi]$.

f دالة معرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = x^2 + 1$ إذا كان $x < 0$ و $f(x) = x^2 + x - \sin x + 1$ إذا كان $x \geq 0$

(1) بين أن f مستمرة عند 0. هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0 ؟

(2) نفرض في هذا السؤال أن $x \in [0, +\infty[$.

(أ) احسب $f'(x)$ و $f''(x)$ و استنتج اتجاه تغير الدالة f' على $[0, +\infty[$.

(ب) احسب $f'(0)$ ثم استنتج إشارة $f'(x)$ على $[0, +\infty[$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f على $[0, +\infty[$.

34

(1) لتكن g دالة معرفة على \mathbb{R} بحيث $g(0)=0$ و $g'(x)=\frac{1}{1+x^2}$

(أ) باستعمال طريقة أولر بخطوة 0,5 أعط قيمة مقربة لـ $g(0,5)$ و $g(1)$

(ب) باستعمال طريقة أولر بخطوة 0,2 ارسم المنحنى البياني لقرب لـ g على $[0, 1]$.

(ج) طبق الطريقة السابقة بخطوة 0,1 ثم بخطوة 0,01 و باستعمال الآلة الحاسبة البيانية أو المجدول ارسم منحنى تقريبا للدالة g .

- أعط قيمة مقربة لـ $g(1)$.

(2) باستعمال اتجاه تغير الدالتين برهن أنه من أجل كل x من $[0, +\infty[$ يكون

$$0 \leq g(x) \leq x$$

(3) لتكن f دالة الظل (\tan)

(أ) برهن أنه من أجل كل x من $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ يكون $g'(f(x)) = \frac{1}{1+\tan^2 x}$

(ب) استنتج مشتق الدالة $g \circ f$ ثم احسب $g \circ f(0)$

(ج) استنتج من الأسئلة السابقة أنه من أجل كل x من $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ يكون

$$g(x) - x = 0 \quad (g \circ f)(x) - x = 0$$

35

f_n دالة عددية معرفة على $]-1, +\infty[$ بـ $f_n(x) = x^n \sqrt{1-x}$ مع n عدد طبيعي غير

معدوم و نرمز بـ (γ_n) إلى التمثيل البياني لها في معلم متعامد و متجانس.

(1) هل الدالة f_n قابلة للاشتقاق عند 1 ماذا تستنتج ؟

(2) عين حسب قيم n نهاية f_n عند $(-\infty)$

(3) ادرس تغيرات f_n (ميز الحالتين n فردي و n زوجي)

(ب) في كل حالة من هاتين الحالتين شكل جدول تغيرات f_n .

(4) ارسم (γ_1) و (γ_2) (الوحدة هي 4cm)

(5) ليكن n عدد طبيعي غير معدوم، عين حسب قيم x الوضع النسبي لـ (γ_n) و

(γ_{n+1})

لتكن الدالة العددية f_α المعرفة بـ $f_\alpha(x) = \frac{\sin^2 x - \alpha^2}{\cos^2 x - \alpha^2}$ و α وسيط حقيقي موجب

و (γ_α) التمثيل البياني للدالة f_α

(1) عين حسب قيم α مجموعة تعريف الدالة f_α .

(2) إذا كان $\alpha \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$ بين أن جميع المنحنيات (γ_α) تمر من نقطة ثابتة يطلب تعيينها.

(3) ادرس تغيرات الدوال f_0, f_1, f_2 ثم ارسم f_0, f_1, f_2 و $(\gamma_0), (\gamma_1), (\gamma_2)$

f_α دالة معرفة بـ $f_\alpha(x) = \alpha x + 2\sqrt{\alpha^2 x^2 - 1}$ ، $\alpha \in \mathbb{R}^*$ ، (γ_α) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس.

(1) أوجد مجموعة تعريف الدالة f_α ثم ضعها على شكل مجالات.

(2) هل المنحني (γ_α) له مستقيمات مقاربة مائلة ؟

(3) ادرس قابلية اشتقاق f_α عند $\frac{1}{\alpha}$ و $-\frac{1}{\alpha}$ ماذا تستنتج ؟

(ب) نضع $\alpha = \frac{1}{3}$ ، ارسم $(\gamma_{\frac{1}{3}})$

(ج) برهن أن $f_{\frac{1}{3}}$ تقبل دالة عكسية $f_{\frac{1}{3}}^{-1}$ يطلب رسم تمثيلها البياني في نفس العلم.

(4) لتكن g دالة معرفة بـ $g(x) = \frac{-1}{3}x - 2\sqrt{\frac{x^2}{9} - 1}$

اثبت أن (C_g) و $(\gamma_{\frac{1}{3}})$ متناظران بالنسبة إلى (xx') ثم ارسم (C_g) .

f دالة معرفة بـ $f(x) = |x-1| + \frac{2}{x+1}$ و (γ) منحنىها البياني.

(1) ادرس استمرارية و قابلية الاشتقاق f عند $x=1$

(2) بين أن $(d_1) : y = x-1$ ، $(d_2) : y = -x+1$ مستقيمان مقاربان لـ (γ) بجوار $(+\infty)$ و $(-\infty)$ على الترتيب.

(3) ادرس تغيرات f ثم شكل جدول تغيراتها. و ارسم (γ) و (d_1) و (d_2)

(4) لتكن g دالة معرفة بـ $g(x) = |x| - 1 + \frac{2}{1+|x|}$

عين مجموعة تعريف الدالة g ثم بين أن g زوجية و ارسم (γ') بيان g استنتاجا.

لتكن f دالة معرفة بـ $f(x) = \frac{1-\sin^2 x}{2+\sin x}$ و (γ) منحنائها البياني في معلم متعامد

و متجانس $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j})$ (طول الوحدة 2cm).

(1) ا عين مجموعة تعريف f .

(ب) برهن أن المنحني (γ) يقبل المستقيم (d) ذا المعادلة $x = \frac{\pi}{2}$ كمحور تناظر له.

(ج) اثبت أن f دورية و دورها 2π .

(د) اشرح لماذا يمكن اقتصار دراسة f على $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

(2) (ا) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون

$$f'(x) = \cos x \left[\frac{3}{(2+\sin x)^2} - 1 \right]$$

(ب) برهن أن للمعادلة $f(x) = 0$ حلا وحيدا α من $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ثم احسب $f(\alpha)$.

(ج) شكل جدول تغيرات f على المجال $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

(د) احسب $f(0)$ ، $f'(\frac{\pi}{6})$ ، $f(\frac{\pi}{6})$ ، $f(\frac{\pi}{3})$ ، ثم اعط قيمة تقريبية لـ α .

(3) (ا) ارسم (γ) على المجال $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

(ب) ارسم (γ_1) حيث (γ_1) هي مجموعة النقاط $M(x, y)$ من (γ) و $\frac{\pi}{2} \geq x \geq 0$.

في معلم متعامد و متجانس (طول الوحدة 10cm).

(4) لتكن g دالة معرفة بـ $g(x) = f(x) - x$

(ا) برهن أنه يوجد عدد حقيقي وحيد x_0 من $0, \frac{\pi}{2}$ بحيث $g(x_0) = 0$

(ب) حدد بيانيا حل x_0 انطلاقا من (γ_1)

(ج) تحقق أن x_0 هو الحل الوحيد للمعادلة $g(x) = 0$ على \mathbb{R} .

(5) لتكن التنايلية العددية (U_n) المعرفة بـ $U_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n :

$$B_n(U_{n+1}, U_{n+1}), A_n(U_n, U_{n+1})$$

(ا) على أي منحنى نجد النقطتين A_n و B_n ؟

(ب) انشئ النقط $A_0, B_0, A_1, B_1, A_2, B_2$ في نفس المعلم و ذلك باستعمال السؤال (1) و بدون حساب ترتيب هذه النقط ما عند النقطة A_0 .

(ج) مثل الأعداد الحقيقية U_0, U_1, U_2, U_3 على المحور (\vec{o}, \vec{i}) .

(د) برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n يكون $U_n \in [0, \frac{1}{2}]$

(هـ) برهن أن من أجل كل x من $[0, \frac{\pi}{2}]$ يكون $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$ ثم بين أنه من

أجل كل $n \in \mathbb{N}$ يكون $|U_{n+1} - x_0| \leq \frac{2}{3} |U_n - x_0|$

(و) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون :

$$|U_n - x_0| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |U_0 - x_0|$$

ماذا يمكن استنتاجه بالنسبة إلى التنايلية (U_n) ؟

في معلم متعامد و متجانس $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j})$ نعتبر الدائرة (C) ذات المعادلة $x^2 + y^2 = 1$

و النقطة I ذات الإحداثي $(1, 0)$ ، M و N نقطتان من (C) بحيث

$(OI) \perp (MN)$ و H نقطة تقاطع المستقيمان (OI) و (MN) ، نضع $\vec{OH} = x\vec{i}$.

(1) احسب مساحة المثلث MNI بدلالة x .

(2) الدالة المعرفة على $[-1, 1]$

$$f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$$

(ا) اوجد قيم f عند أطراف مجال التعريف.

(ب) ادرس قابلية اشتقاق f عند -1 و 1

ثم استنتج معادلات المماسات للمنحني (C_f)

الممثل للدالة f عند النقطتين

ذواتا الفاصلتين -1 و 1 .

(ج) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

(د) ارسم (C_f) في معلم متعامد و متجانس (طول الوحدة 10cm)

(3) من أجل أي قيمة لـ x مساحة المثلث MNI أعظمية ؟ ما هي هذه المساحة ؟

(4) من أجل أي قيمة لـ x مختلفة عند الصفر تكون مساحة المثلث MNI تساوي 1 (يعطى x بتقريب 0,01 بالزيادة).

لتكن (C) نصف دائرة مركزها O و نصف قطرها r ، مستطيل $KHMN$ مرسوم داخل نصف الدائرة كما هو موضح في الشكل.

(1) عين قيمة x بحيث المستطيل له

مساحة أعظمية، ما هي عندئذ قيمة y ؟

(2) نسمي الآن θ قياس الزاوية AOM

عبر بدلالة θ عن مساحة المستطيل $KHMN$

مستطيل $KHMN$ مرسوم داخل نصف الدائرة كما هو موضح في الشكل.

عبر بدلالة θ عن مساحة المستطيل $KHMN$